Opgave 40-1:

Denne opgave går ud på at bevise, at $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, for $n \geq 1$.
Hvilke af nedenstående muligheder udgør korrekte induktionsbeviser, inkl. korrekte begrundelser?

This question is about proving that $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, *for* $n \geq 1$.
Choose the options that constitute a correct proof by induction, incl. correct arguments.

Svar 1.a: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.
Induktionsskridt: For $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) \; + \; 2(k+1)-1 \\ &= k^2 \; + \; 2(k+1)-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Svar 1.b: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.
Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \; + \; 2k-1 \\ &= (k-1)^2 \; + \; 2k-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= k^2\end{aligned}$$

Svar 1.c: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \ + \ 2k-1 \\ &= (k-1)^2 \ + \ 2k-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= k^2\end{aligned}$$

Svar 1.d: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ og $\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1+3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) \ + \ 2(k+1)-1 \\ &= k^2 \ + \ 2(k+1)-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Svar 1.e: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \ + \ 2k-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (k-1)^2 \ + \ 2k-1 \\ &= k^2\end{aligned}$$

Svar 1.f: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ og $\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1+3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \;+\; 2k-1 \;+\; 2(k+1)-1 \\ &= (k-1)^2 \;+\; 2k-1 \;+\; 2(k+1)-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

Svar 1.g: **Basis:** $\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1+3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \;+\; 2k-1 \\ &= (k-1)^2 \;+\; 2k-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= k^2\end{aligned}$$

Svar 1.h: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) \;-\; (2k-1) \\ &= k^2 \;-\; (2k-1), \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (k-1)^2\end{aligned}$$

Svar 1.i: **Basis:** $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{k-1}(2i-1) \ + \ 2k-1 \\ &= (k-1)^2 \ + \ 2k-1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= k^2\end{aligned}$$