

### Spørgsmål 1 (8%)

Hvilke udsagn er sande?

Husk, at  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , og  $|x|$  betyder den numeriske værdi af  $x$ .

*Which propositions are true?*

*Recall that  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , and  $|x|$  means the absolute value of  $x$ .*

**Svar 1.a:**  $\exists x \in \mathbb{Z}: x \geq 2$

**Svar 1.b:**  $\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{N}: y = |x|$

**Svar 1.c:**  $\forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: (x = y \Rightarrow x^2 = y^2)$

**Svar 1.d:**  $\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x \cdot y = y$

Svar 1.e:  $\forall x \in \mathbb{Z}: x = 2$

### Spørgsmål 2 (2%)

Hvilket udsagn er ækvivalent med  $\neg(\exists a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 = b)$ ?

*Which proposition is equivalent to  $\neg(\exists a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 = b)$ ?*

Svar 2.a:  $\forall a \in \mathbb{Z}: \forall b \in \mathbb{Z}: a^2 = b$

**Svar 2.b:**  $\forall a \in \mathbb{Z}: \forall b \in \mathbb{Z}: a^2 \neq b$

Svar 2.c:  $\exists a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 = b$

Svar 2.d:  $\exists a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 \neq b$

Svar 2.e:  $\exists a \in \mathbb{Z}: \forall b \in \mathbb{Z}: a^2 = b$

Svar 2.f:  $\exists a \in \mathbb{Z}: \forall b \in \mathbb{Z}: a^2 \neq b$

Svar 2.g:  $\forall a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 = b$

Svar 2.h:  $\forall a \in \mathbb{Z}: \exists b \in \mathbb{Z}: a^2 \neq b$

### Spørgsmål 3 (10%)

Hvilke udsagn er ækvivalente med  $p \vee q$ ?

*Which propositions are equivalent to  $p \vee q$ ?*

**Svar 3.a:**  $\neg q \Rightarrow p$

**Svar 3.b:**  $(p \wedge q) \vee (p \Leftrightarrow \neg q)$

**Svar 3.c:**  $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

**Svar 3.d:**  $p \vee (q \wedge \neg p)$

Svar 3.e:  $q \Rightarrow \neg p$

Svar 3.f:  $p \Leftrightarrow \neg q$

Svar 3.g:  $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

Svar 3.h:  $p \vee (p \Rightarrow q)$

Svar 3.i:  $\neg(p \wedge q)$

### Spørgsmål 4 (8%)

Lad  $A$ ,  $B$  og  $C$  være mængder. Hvilke udsagn er sande?

*Let  $A$ ,  $B$ , and  $C$  be sets. Which propositions are true?*

**Svar 4.a:**  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

**Svar 4.b:**  $A - \bar{A} = A$

**Svar 4.c:**  $A \cup A = A$

Svar 4.d:  $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B \cup C)$

Svar 4.e:  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

**Spørgsmål 5 (8%)**

Denne opgave går ud på at bevise, at  $2n \geq n + 10$ , for alle  $n \geq 10$ .

Hvilke af nedenstående muligheder udgør korrekte induktionsbeviser, inkl. korrekte begrundelser?

*This question is about proving that  $2n \geq n + 10$ , for all  $n \geq 10$ .*

*Choose the options that constitute a correct proof by induction, incl. correct arguments.*

**Svar 5.a: Basis:**  $2 \cdot 10 \geq 10 + 10$ .

**Induktionsskridt:** For  $n \geq 10$  gælder:

$$\begin{aligned} 2(n + 1) &= 2n + 2 \\ &\geq n + 12, && \text{ifølge induktionsantagelsen} \\ &> (n + 1) + 10 \end{aligned}$$

**Svar 5.b: Basis:**  $2 \cdot 10 \geq 10 + 10$ .

**Induktionsskridt:** For  $n \geq 11$  gælder:

$$\begin{aligned} n + 10 &= (n - 1) + 10 + 1 \\ &\leq 2(n - 1) + 1, && \text{ifølge induktionsantagelsen} \\ &\leq 2n \end{aligned}$$

**Svar 5.c: Basis:**  $2 \cdot 10 \geq 10 + 10$ .

**Induktionsskridt:** For  $n \geq 10$  gælder:

$$\begin{aligned} 2n &\geq n + 10 \\ \Leftrightarrow 2n + 2 &\geq n + 12 \\ \Rightarrow 2(n + 1) &\geq (n + 1) + 10 \end{aligned}$$

**Svar 5.d: Basis:**  $2 \cdot 20 \geq 20 + 10$ .

**Induktionsskridt:** For  $n \geq 21$  gælder:

$$\begin{aligned} 2(n+1) &= 2n+2 \\ &\geq n+12, && \text{ifølge induktionsantagelsen} \\ &> (n+1)+10 \end{aligned}$$

Svar 5.e: **Basis:**  $2 \cdot 10 \geq 10 + 10$ .

**Induktionsskridt:** For  $n \geq 3$  gælder:

$$\begin{aligned} 2n &= 2(n+1) - 2 \\ &\geq (n+1) + 10 - 2, && \text{ifølge induktionsantagelsen} \\ &> n+10 \end{aligned}$$