MAT 2 LINEÆR ALG. JUNI 2010

OPG 1a)

$$T=\begin{pmatrix}1&1&5&5&3&a\\1&2&8&8&5&b\\1&0&2&2&1&c\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&5&5&3&a\\0&1&3&3&2&b-a\\0&-1&-3&-3&-2&c-a\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\underline{\underline{\begin{pmatrix}1&0&2&2&1&2a-b\\0&1&3&3&2&-a+b\\0&0&0&0&0&-2a+b+c\end{pmatrix}}}$$

ialt 4 elementære rækkeoperationer.

rang(K) = antal ledende 1 = 2

rang(T) = " " " $= \begin{cases}2 & \text{når } 2a=b+c\\ 3 & \text{'' } 2a\neq b+c\end{cases}$

OPG 1b)

Hvis $2a\neq b+c$ så er der ingen løsninger

Hvis $2a=b+c$ så er der uendelig mange:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+2a-b-2s-2t-r\\-a+b-3s-3t-2r\\s\\t\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-b\\-a+b\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

For $a=b=c=1$ fås

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}}}$$

Antal frihedsgrader = antal frievar. = $\underline{\underline{3}}$

OPG 1c)

Rang(K) = 2, dvs. max antal lin. uafh. søjler er 2, dvs <u>tre søjler fra K er altid lin. afh.</u> To søjler fra K er lin. uafh., bortset fra $\underline{\{s_2, s_3\}}$ som er <u>lin. afh</u> ($s_2 = s_3$).

OPG 1d)

Da rang(K)=2 er de tre rækker lin. afh. En lin. afh. kan fås på mindst tre forskellige måder:

1) Den reducerede form af T i a) viser at r_3 bliver 0 ved at trække $2r_1$ fra r_2+r_3 (de giver $-2a+b+c$ leddet), dvs

$$0 = r_2+r_3-2r_1, \text{ dvs } \underline{\underline{r_3 = 2r_1-r_2}}$$

2) Den reducerede form af T blev nået vha. fire elementære rækkeoperationer.

$$r_3 - r_1 + 1(r_2-r_1) = 0, \text{ dvs}$$
$$r_3-2r_1+r_2 = 0, \text{ dvs. } \underline{\underline{r_3 = 2r_1-r_2}}$$

3)
$$K^t=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\5&8&2\\5&8&2\\3&5&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&3&-3\\0&3&-3\\0&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Heraf ses at $s_3 = 2s_1 - s_2$. Men disse søjler er r_1, r_2 og r_3, så

$$\underline{\underline{r_3 = 2r_1-r_2}}$$

OPG 2a)

$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1) = 4-1 = \underline{\underline{3}}$

$q(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \underline{\underline{\lambda^2 - 4\lambda + 3}}$

$= (\lambda-3)(\lambda-1)$, dvs $\underline{\underline{\text{rødderne er 1 og 3}}}$

OPG. 2b)

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)(-1) & 2(-1)+(-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2+2(-1) & (-1)(-1)+2\cdot 2 \end{pmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}}$

$A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$

($q(A)$ er altid 0 – det er en sætning i lineær algebra (som vi IKKE har haft!))

OPG. 2c)

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$A^n = \underbrace{PDP^{-1}\cdot PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}}_{n \text{ gange}} = P\cdot D^n\cdot P^{-1}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ 1 & -3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}}}$

$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$W^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2 & 2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) \\ 2(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underline{= A}$

OPG. 2d)

$V^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hvor $V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

giver: $a^2 = 1$, $b^2 = 3$, dvs $a = \pm 1$ og $b = \pm\sqrt{3}$, dvs ialt fire løsninger:

$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$

En løsning til $A = W^2$ er $W = PVP^{-1}$ (fås af $A = PVP^{-1}\cdot PVP^{-1}$). Så de fire løsninger for V giver fire løsn. for W, f.eks.

$W = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$

OPG. 3a

$\det(I-A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot($

$+ 0 - 1\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}) - 0 - 0 =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} - \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

$(I-A)^{-1}$ eksisterer da $\det(I-A) \neq 0$.

$(I-A)^{-1}$ kan findes på mindst to forskellige måder:

① $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $\operatorname{adj}(I-A) = C^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)}\,\mathrm{adj}(I-A) = 8\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \cdot 8$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

hvilket viser at $\underline{\underline{(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}}}$

OPG. 3b)

$\underline{\underline{(I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{(I-A)\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ giver at hvis $a=b=c=50$ så skal produktionen være

$$(I-A)^{-1}\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 700 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

OPG. 3c)

$(300, 200, 500)(I-A) = \underline{(50, 50, 0)} = \underline{(u, v, w)}$

$(p, q, r) = (50, 50, 50)\cdot(I-A)^{-1} = \underline{(500, 300, 900)}$

OPG. 3d)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ viser at

$x = 4a + 2b + 6c$. Dvs. <u>en eftersp. b i sektor Y skal modsvares af en prod. på 2b i sektor X.</u>

$(p, q, r) = (u, v, w)\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ viser at

$q = 2u + *v + *w$. Dvs. <u>en fortjeneste på u i sektor X skal modsvares af en pris på 2u i sektor Y.</u>

OPG. 4a)

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$

$Av_1 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$, dvs v_1 egenvektor med egenværdi 1.

$Av_2 = A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_2$, dvs v_2 egenvektor med egenværdi 0

$Av_3 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_3$, dvs v_3 egenvektor med egenværdi 2.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

OPG. 4b)

$\|s_2\| = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

dvs s_2 har lgd. 1. Tilsv. for s_1 og s_3

$s_1 \cdot s_2 = 0 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 + 0 + 0 = 0$

dvs $s_1 \perp s_2$. Tilsv. $s_1 \perp s_3$ og $s_2 \perp s_3$.

$P^{-1} = P^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}$ $\quad D = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$

$\det D = 0$, så D^{-1} eks. ikke.

$\det A = 0$, så A^{-1} eks. ikke.

OPG. 4c)

Den adjungerede til A findes vha co-faktor-matricen:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{adj} A = C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{adj} A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$

Dette fås også fra formlen

$\operatorname{adj} \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

OPG. 4d)

$Q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = (x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = \underline{\underline{X^2 + 2Z^2}}$

Det ses at $Q \geq 0$ altid, dvs $\underline{\underline{Q \text{ er pos. semidef.}}}$ Den er $\underline{\text{ikke pos.}}$ $\underline{\underline{\text{definit}}}$ da $X = 0, Y \neq 0, Z = 0$ giver $Q = 0$.

$Q = 0 \iff \underline{X = 0 \text{ og } Z = 0}$

$\iff y = 0$ og $x + z = 0$

$\iff \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Det sidste ses også umiddelbart af

$Q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = (x + z)^2 + y^2$

VEJLEDENDE RETTEKODE :

Der gives 0-10 paints pr spørgsmål. Der kan derved opnås mellem 0 og 160 paints ialt.

Paint-bedømmelsen suppleres med en helhedsbedømmelse.

Mht. paints kan følgende "oversættelse" betragtes som vejledende

00 - 40	-3
40 - 80	00
80 - 90	2
90 - 110	4
110 - 135	7
135 - 150	10
150 - 160	12

MINE EGNE POINTS :