Skriftlig Eksamen
Diskret Matematik (DM528)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Tirsdag den 20 Januar 2009, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt. Brug af computer er ikke tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 7 nummererede sider (1–7). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen, samt noterne. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksaminatorierne, eller til aflevering. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, noterne, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål! **Husk at begrunde dine svar!**

OPGAVE 1 (10%)

Løs rekursionsligningen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \text{ og } a_0 = a_1 = 1.$$

OPGAVE 2 (20%)

En partikel starter til tiden $t = 0$ fra et fast punkt O, som vi tager til at være $x = 0$ på x-aksen. For hvert sekund gør partiklen en af følgende: enten bliver den stående hvor den er, eller også går den én enhed i den positive x-retning. Sandsynligheden for, at den bliver stående er q og sandsynligheden for, at den går fremad er p, hvor $p + q = 1$. Lad $P_n(r)$ betegne sandsynligheden for, at partiklens position er $x = r$ til tiden $t = n$.

Spørgsmål a:

Bevis, at $P_n(r) = C(n, r)p^r q^{n-r}$.

Antag nu i stedet, at partiklen til tiden $t = 0$ starter i punktet $(0, 0)$ i et (x, y)-koordinatsystem og at den hvert sekund bevæger sig enten én enhed i x-aksens positive retning (med sandsynlighed p), eller én enhed i y-aksens positive retning (med sandsynlighed q), hvor $p + q = 1$. Lad $Q_n(r, s)$ betegne sandsynligheden for, at partiklens koordinater er (r, s) til tiden $t = n$.

Spørgsmål b:

Bestem sandsynligheden $Q_n(r, s)$ for alle r, s, n.

Lad nu $p = 1/3$ og $q = 2/3$ for partiklen ovenfor (den der bevæger sig i 2-dimensioner).

Spørgsmål c:

Bestem sandsynlighederne for følgende begivenheder:

(i) Partiklen passerer igennem punktet (5,2).

(ii) Partiklen passerer igennem både (5,2) og (7,1).

(iii) Partiklen passerer igennem både (5,2) og (6,3).

OPGAVE 3 (25%)

Et firma ønsker at ansætte 50 nye medarbejdere. Af hensyn som vi ikke skal begrunde her, opstiller firmaet en liste på 4 egenskaber som en ideel kandidat ikke må have nogen af. De 4 egenskaber er:

1. Vil ikke arbejde mere end 37 timer om ugen.
2. Forlanger fri firmabil oveni lønnen.
3. Vil ikke deltage i udlandsrejser (f.eks. fordi man er bange for at flyve).
4. Regner med at skulle have orlov indenfor det næste par år.

Lad A_i betegne mængden af personer der stiller kravet i, for $i = 1, 2, 3, 4$.

Der indkaldes 200 personer til samtale og ved interviews finder man følgende data:

- $| A_1 |= 100, | A_2 |= 50, | A_3 |= 75, | A_4 |= 25$
- $| A_1 \cap A_2 |= 10, | A_1 \cap A_3 |= 25, | A_1 \cap A_4 |= 5,\ | A_2 \cap A_3 |= 20,$
  $| A_2 \cap A_4 |= 0, | A_3 \cap A_4 |= 10.$
- $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 |= 5, | A_1 \cap A_2 \cap A_4 |= 0,\ | A_1 \cap A_3 \cap A_4 |= 2,$
  $| A_2 \cap A_3 \cap A_4 |= 0.$
- $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 |= 0.$

Ovenstående data gemmes nu på datakort, ét for hver interviewet person. Nedenstående spørgsmål handler om hvad man kan slutte, alene ud fra disse data.

Spørgsmål a:

Hvor mange af ansøgerne er ideelle set ud fra firmaets synspunkt?

Firmaet skal som sagt bruge 50 personer og, som vist i spørgsmål a, er der ikke nok ideelle ansøgere. Man beslutter derfor at slække definitionen på en brugbar ansøger, så ansøgere, der stiller krav om en 37 timers arbejdsuge, men ikke andre krav, også kan bruges.

Spørgsmål b:

Hvor mange ansøgere er nu ‘kvalificerede’ ?

Nedenfor lader vi H_i betegne hændelsen at en tilfældigt udtrukket ansøger (dvs. et datakort) stiller kravet i.

Spørgsmål c:

Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældig udtrukket ansøger både kræver fri firmabil og 37 timers arbejdsuge?

Spørgsmål d:

Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udtrukket ansøger, som kræver fri firmabil også forlanger en 37 timers arbejdsuge?

Spørgsmål e:

Er hændelserne H_1 og H_2 uafhængige?

OPGAVE 4 (25%)

Spørgsmål a:

Gør rede for hvordan man kan repræsentetere de 31 forskellige opdelinger af en mængde med 6 elementer i to disjunkte ikke tomme delmængder ved hjælp af binære strenge af længde 6. Hint: hvor mange strenge svarer til den samme opdeling.

Spørgsmål b:

Udvid metoden ovenfor til at repræsentere opdelinger af en mængde med 6 elementer i k disjunkte ikke tomme delmængder for $k \in \{3, 4, 5, 6\}$. Hint: hvor mange gange er den samme opdeling nu repræsenteret?

Spørgsmål c:

Vis, at antallet af måder, hvorpå man kan inddele en mængde på 6 elementer i disjunkte ikke tomme delmængder er lig med 203. Hint: se på afbildninger der er på.

Spørgsmål d:

Gør kort rede for hvordan man kan lave en algoritme som givet en mængde S med 6 elementer returnerer en tilfældig opdeling af S i disjunkte ikke tomme delmængder. Dvs. sandsynligheden for at den returnerede opdeling er en bestemt af de 203 forskellige opdelinger skal være $\frac{1}{203}$. **Husk at argumentere for at din algoritme er korrekt!**

OPGAVE 5 (20%)

Betragt følgende eksperiment P: 6 kugler fordeles i 3 forskellige kasser (dvs. de kan skelnes fra hinanden) så hver kugle har sandsynlighed $\frac{1}{3}$ for at komme i en vilkårlig kasse. De 6 kugler er farvede så der er 2 røde, 2 blå og 2 grønne kugler.

Spørgsmål a:

Gør rede for at kuglerne kan fordeles i kasserne på 216 forskellige måder.

Spørgsmål b:

Lad E betegne hændelsen at ingen kasse indeholder 2 kugler af samme farve. Bestem sandsynligheden for E.

Spørgsmål c:

Betragt en proces hvor P gentages indtil hændelsen E er indtruffet og lad X være den stokastiske variabel der angiver antallet af gange eksperimentet udføres inden processen stopper. Bestem middelværdien af X.

Spørgsmål d:

Giv en begrundet øvre henholdsvis nedre grænse for følgende sandsynligheder. Du skal argumentere for hvorfor du kan anvende den metode du bruger til at lave denne vurdering

(a) $P[X > 24]$.

(b) $P[X < 4]$.