Skriftlig Eksamen
Automatteori og Beregnelighed (DM17)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense Campus

Lørdag, den 15. Januar 2005

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt.
Eksamenssættet består af 5 opgaver på 5 nummererede sider (1–5).
Bagerst findes en dansk oversættelse ligeledes på 5 nummerede sider (6–10).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i point. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, eller en af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt!). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) om automatteori accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

You are allowed to use the text-book, your personal notes and a pocket calculator.
The exam contains 5 problems, each on a single page. The english version can be found on pages 1-5, the danish version is on pages 6-10.
A complete solution consists of a solution for all 5 problems. How much a problem weights can be seen from the numbers given in brackets for each problem. In general you may refer to results from the book unless it is explicitely stated that you may not. The same holds for problems solved in the exercise sessions. Of course, if you cite such a result it has to be obvious that your claim really is a straightforward consequence of that result.
It will not be accepted as an answer to refer to other books than the text-book.

Recall that you have to explain all your claims!

Problem 1 (25 = 5 + 10 + 10 %)

Let $\Sigma = \{a, b\}$. Consider the language

$$L := \{w \in \Sigma^* | \text{each occurence of } aa \text{ in } w \text{ is followed directly by the letter } b\}.$$

Examples: The strings bb , bab , $aabbabaab$ are in L
The strings aa , $baaabb$ are not in L

a) Give the state diagram of a deterministic finite automaton accepting L.

b) Find a regular expression for the complement $\bar{L}$ of L.

c) Prove that there is **no** deterministic finite automaton that has at most three states and accepts L.

Problem 2 (20 = 10 + 10 %)

a) Recall the Pumping Lemma for regular languages, see Theorem 1.37 in Sipser's book:

<u>**Pumping Lemma:**</u> If A is a regular language, then there is a number p (the pumping length) where, if s is any string in A of length at least p, then s may be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying

1. for each $i \geq 0, xy^i z \in A$
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$.

The Lemma has the form of a logical implication $P \Rightarrow Q$.

Write down in precise mathematical terms its contrapositive, i.e.

$$\neg Q \Rightarrow \neg P \ .$$

b) Let $\Sigma := \{a, b, c\}$ be a finite alphabet. Define

$$L := \{w \in \Sigma^* | w = va^n \text{ where } v \in \Sigma^*, \ |v| = n, n \geq 1\}.$$

Use the Pumping Lemma to show that L is not regular.

Problem 3 (15 = 5 + 10 %)

Consider the context-free grammar $G = (V, \Sigma, R, S)$, where
$V = \{S, A, B\}, \Sigma := \{a, b, c\}$ and the rules in R are

$$\begin{array}{ll} S \mapsto cA & S \mapsto cB \\ A \mapsto cbA & A \mapsto b \\ B \mapsto aBb & B \mapsto S \end{array}$$

The word w is defined as $w := caccbbb$

a) Find a derivation of w in G.

b) Describe an **infinite** set of strings that are derivable in the grammar G. You should also precisely describe the way how to obtain the derivation for each of those strings.

Hint for b): It might be useful to consider your derivation in part a) in order to find a pattern for the derivation of an infinite set of words.

Problem 4: (20 = 5 + 10 + 5 %)

For $\Sigma := \{a, b\}$ consider a Turing machine M over Σ. The machine M has a set $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ of states. The starting state is q_0 and the only accepting final state is q_4. Moreover, the transition function of M is given by the following table:

$$
\begin{array}{rcll}
\delta(q_0, a) & = & (q_1, a, R) & \\
\delta(q_0, b) & = & (q_0, b, R) & \\
\delta(q_0, \sqcup) & = & (q_3, b, N) & \\
\delta(q_1, a) & = & (q_3, b, N) & \\
\delta(q_1, b) & = & (q_2, b, R) & \\
\delta(q_1, \sqcup) & = & (q_1, \sqcup, N) & \\
\delta(q_2, a) & = & (q_1, b, R) & \\
\delta(q_2, b) & = & (q_2, a, R) & \\
\delta(q_2, \sqcup) & = & (q_4, \sqcup, N) & \\
\delta(q_3, x) & = & (q_3, x, L) & \forall x \in \{a, b, \sqcup\} \\
\delta(q_4, x) & = & (q_4, x, N) & \forall x \in \{a, b, \sqcup\}
\end{array}
$$

a) Perform the computation of M on input $w = abab$.

b) What is the language $L(M)$ accepted by M? Give a precise explanation why?

c) Is the following problem decidable: Input of the problem is a code of machine M defined above. The question is whether there are infinitely many words w which M accepts by using precisely $1023 + |w|$ many steps (i.e. $1023 + |w|$ applications of the transition function)? Explain your result.

Problem 5 (20 %)

Which of the following statements a) - d) are true, which are false. Give a proof for each of your answers.

a) Consider the language

$$L := \{c_M | c_M \text{ is the code of a Turing machine } M \text{ having the following property: if the machine accepts at least two different strings, then it accepts at least 10 different strings}\}$$

Then the language L is decidable.

b) Let $\Sigma = \{a, b, c\}$. Let L_1 be a regular language. Then the language L_2 is regular as well, where L_2 is defined as

$$L_2 := \{w \in L_1 | w \text{ contains at least two } a's\}$$

c) For each regular language L there exists a grammar G such that

G **is not** context free **and** $L(G) = L$.

d) Let Σ be a finite alphabet. For each Turing machine M there exists a regular expression R over Σ such that the language $L(R)$ represented by R satisfies

$$L(M) \subseteq L(R) .$$

Opgave 1 (25 = 5 + 10 + 10 %)

Lad $\Sigma = \{a, b\}$. Definer sproget

$$L := \{w \in \Sigma^* | \text{efter enhver forekomst af } aa \text{ i } w \text{ følger umiddelbart bogstavet } b\}.$$

Eksempel: Strengene bb , bab , $aabbabaab$ er i L
Strengene aa , $baaabb$ er ikke i L

a) Angiv et tilstands-diagram for en deterministisk endelig automat som accepterer L.

b) Find at regulært udtryk som repræsenterer komplementet $\bar{L}$ af L.

c) Bevis at der **ikke** findes en deterministisk endelig automat som har højest tre tilstande og accepterer L.

Opgave 2 (20 = 10 + 10 %)

a) Pumpe Lemmaet for regulære sprog siger (se Theorem 1.37 i Sipsers bog):

Pumpe Lemmaet: Lad A være et regulært sprog. Der findes et naturligt tal p (pumpe længden) således at der gælder: hvis s er en streng i A med en længde $\geq p$, så findes en opdeling af s i tre strenge x, y, z med $s = xyz$ som opfylder

1. for ethvert $i \geq 0, xy^i z \in A$
2. $|y| > 0$, og
3. $|xy| \leq p$.

Lemmaet har den logiske form af en implikation $P \Rightarrow Q$.

Angiv i en præcis matematisk form kontrapositionen af lemmaet, det vil sige angiv

$$\neg Q \Rightarrow \neg P \ .$$

b) Lad $\Sigma := \{a, b, c\}$ være et endeligt alfabet. Definer

$$L := \{w \in \Sigma^* | w = va^n \text{ hvor } v \in \Sigma^*,\ |v| = n, n \geq 1\}.$$

Benyt Pumpe Lemmaet til at vise at L ikke er regulært.

Opgave 3 (15 = 5 + 10 %)

Betragt en kontekst-fri grammatik $G = (V, \Sigma, R, S)$ med
$V = \{S, A, B\}, \Sigma := \{a, b, c\}$ og reglerne i R er

$$\begin{array}{ll} S \mapsto cA & \qquad S \mapsto cB \\ A \mapsto cbA & \qquad A \mapsto b \\ B \mapsto aBb & \qquad B \mapsto S \end{array}$$

Strengen w er defineret som $w := caccbbb$

a) Find en afledning af w i G.

b) Angiv en **uendelig** mængde af strenge som kan afledes i grammatiken G. Du skal præcis angive hvordan afledningen ser ud for alle disse strenge.

Hint til b): Det kan hjælpe at betragte afledningen under del a) for at finde et mønster for afledningen af en uendelig mængde strenge.

Opgave 4: (20 = 5 + 10 + 5 %)

For $\Sigma := \{a, b\}$ betragt en Turing maskine M over Σ. Maskinen M har som dens tilstande mængden $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Start tilstanden er q_0 og den eneste accepterende sluttilstand er q_4. Desuden er transitionsfunktionen givet i den følgende tabel:

$$
\begin{array}{rcll}
\delta(q_0, a) & = & (q_1, a, R) & \\
\delta(q_0, b) & = & (q_0, b, R) & \\
\delta(q_0, \sqcup) & = & (q_3, b, N) & \\
\delta(q_1, a) & = & (q_3, b, N) & \\
\delta(q_1, b) & = & (q_2, b, R) & \\
\delta(q_1, \sqcup) & = & (q_1, \sqcup, N) & \\
\delta(q_2, a) & = & (q_1, b, R) & \\
\delta(q_2, b) & = & (q_2, a, R) & \\
\delta(q_2, \sqcup) & = & (q_4, \sqcup, N) & \\
\delta(q_3, x) & = & (q_3, x, L) & \forall x \in \{a, b, \sqcup\} \\
\delta(q_4, x) & = & (q_4, x, N) & \forall x \in \{a, b, \sqcup\}
\end{array}
$$

a) Angiv M's beregning på input $w = abab$.

b) Hvad er sproget $L(M)$ som M accepterer? Giv et præcist argument som forklarer dit svar.

c) Er det følgende problem afgørligt: Input er en kode for vores førnævnte maskine M. Spørgsmålet er om der findes uendelig mange strenge $w \in \Sigma^*$ som M accepterer ved benyttelsen af præcis $1023+|w|$ mange skridt (d.v.s. $1023 + |w|$ anvendelser af transitionsfunktionen). Forklar dit resultat.

Opgave 5 (20 %)
Hvilke af de følgende påstande a) - d) er sande, hvilke er falske. Begrund alle dine svar.

a) Betragt sproget

$$L := \{c_M | c_M \text{ er koden af en Turing maskine } M \text{ med følgende egenskab: Hvis maskinen accepterer mindst to forskellige strenge, så accepterer den mindst ti forskellige strenge}\}$$

Så kan L afgøres.

b) Lad $\Sigma = \{a, b, c\}$. Lad L_1 være et regulært sprog. Så er også sproget L_2 regulært, hvor L_2 er defineret som

$$L_2 := \{w \in L_1 | w \text{ indeholder mindst to } a\text{'er}\}$$

c) For ethvert regulært sprog L findes en grammatik G således at
G **ikke** er kontekst-fri **og** $L(G) = L$.

d) Lad Σ være et endeligt alfabet. For enhver Turing maskine M findes et regulært udtryk R over Σ så at sproget $L(R)$ som R repræsenterer opfylder

$$L(M) \subseteq L(R) \ .$$