

INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI

**TIDLIGERE EKSAMENSOPGAVER
MM501 Calculus I, MM502 Calculus II
Januar 2006 – juni 2010**

Forord

Denne opgavesamling indeholder samtlige eksamensopgaver, der har været stillet i calculus-kurserne I og II under den for tiden gældende studieordning.

For nogle af eksamenssættene er der inkluderet vejledende besvarelser eller facitlister.

Odense, juni 2010
Hans J. Munkholm

Indhold

Forord	i
Indhold	ii
I MM501 Calculus I	1
En typisk forside til et eksamenssæt	3
Januar 2006	4
20. marts 2006	6
23. marts 2006	7
Januar 2007	9
Marts 2007	11
Januar 2008	13
Marts 2008	15
Oktober 2008	17
Januar 2009	19
Oktober 2009	21
Facitliste oktober 2009	23
5. januar 2010	26
Facit 5. januar 2010	28
27. januar 2010	30
Facit 27. januar 2010	31
Juni 2010	33
Facitliste juni 10	35
II MM502 Calculus II	37
En typisk forside til et eksamenssæt	39
Marts 2006	40
Besvarelse marts 2006	42
Juni 2006	46
Marts 2007	47
Juni 2007	49
Marts 2008	51
Besvarelse marts 2008	53
Juni 2008	55

Facitliste, juni 2008	57
Marts 2009	60
Facitliste marts 09	61
Juni 2009	64
Facitliste juni 09	66
April 2010	70
Facitliste april 10	72
Juni 2010	75
Facitliste juni 10	77

Del I

MM501 Calculus I

INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI
SYDDANSK UNIVERSITET

Skriftlig eksamen

MM501

mandag den 16. januar 2006 kl. 14.00–16.00

Om anvendelse af computer/symbolmanipulerende lommeregner ved eksamen

Det er tilladt at anvende computer (eller lommeregner), men **ikke** printer. Følgende grundregel gælder: Man må gerne bruge computeren til at udføre differentiationer, bestemme integraler og løse reelle ligningssystemer. Derimod vil besvarelser som er baseret på mere avancerede funktioner (som f.eks. løsning af differentialligninger, bestemmelse af grænseværdier, beregning af Taylorpolynomier, løsning af ligninger i komplekse tal) ikke blive accepteret.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladte.

Der lægges vægt på at besvarelserne er klart formulerede, og at argumentationen fremtræder tydeligt. Benyttes resultater fra opgivelserne, er en henvisning ønskelig.

Opmærksomheden henledes på, at det i visse opgaver kan være muligt at regne senere spørgsmål, selvom man ikke har regnet de tidligere.

Opgavesættet består af 7 opgaver med ialt 8 delspørgsmål, som hver tæller 10 point ved bedømmelsen.

Januar 2006**OPGAVE 1 (10 point)**

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

OPGAVE 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - e^{-x^2}}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi.

OPGAVE 3 (20 point)

Betragt det komplekse tal $z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$.

(a) Bestem det komplekse tal $w = z_0^4$ både på polær form og på formen $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

(b) Bestem samtlige komplekse tal z , der løser 4. grads ligningen

$$z^4 = w,$$

og skitsér løsningerne på en tegning.

OPGAVE 4 (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)e^{2x}},$$

som opfylder betingelsen: $y(0) = 0$.

OPGAVE 5 (10 point)

Om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vides at

- f er 3 gange kontinuert differentiabel.
- $f(0) = f'(0) = 0$ og $f''(0) = 3$.

Bestem anden-ordens Taylor polynomiet for f omkring 0, og benyt dette til at bestemme grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^4}.$$

OPGAVE 6 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen af den rationale funktion

$$R(x) = \frac{2x + 4}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}.$$

OPGAVE 7 (10 point)

Betragt funktionen $F: [e, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$F(x) = -\frac{1}{x} \ln(x), \quad (x \in [e, \infty[).$$

Gør rede for, at man kan vælge en konstant c , således at funktionen

$$f(x) = cF'(x), \quad (x \in [e, \infty[),$$

er en tæthedsfunktion på $[e, \infty[$, og bestem denne konstant c .

20. marts 2006**OPGAVE 1 (10 point)**

Bestem den løsning til differentialligningen:

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

som opfylder at

$$y(0) = 2 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

OPGAVE 2 (20 point)

- (a) Bestem Taylor polynomiet af orden 2 omkring 0 for hver af funktionerne

$$f(x) = x \cosh(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \ln(1+x).$$

- (b) Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cosh(x) - \ln(1+x)}{x^2}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Betragt det komplekse tal $z = 2 + 2i$. Bestem den polære form af z , og bestem z^4 på polær form og på formen $x + iy$.

OPGAVE 4 (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = x,$$

som opfylder betingelsen: $y(1) = 0$.

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{1}{x^3 - x}.$$

OPGAVE 6 (20 point)

Betragt funktionen $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x^4}, \quad (x \in [1, \infty[).$$

- (a) Bestem konstanten c således at funktionen

$$g(x) = cf(x), \quad (x \in [1, \infty[),$$

er en tæthedsfunktion på $[1, \infty[$.

- (b) Lad X være en stokastisk variabel med tæthedsfunktion g . Bestem da middelværdien $\mathbb{E}(X)$ og variansen $\mathbb{V}(X)$.

23. marts 2006**OPGAVE 1 (10 point)**

Bestem første ordens Taylor polynomiet (lineariseringen) omkring 0 for hver af funktionerne

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad g(x) = \sinh(x),$$

og bestem derefter grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sinh(x)}{x^2}.$$

OPGAVE 2 (20 point)

(a) Bestem den løsning til differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} + \cosh(x)y = \cosh(x), \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (*)$$

som opfylder at $y'(0) = 1$

(b) Vis, at enhver løsning $y = y(x)$ til (*) opfylder at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Om en funktion $y = y(x)$ defineret på $]0, \infty[$ vides at

(i) $y(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ for alle $x > 0$.

(ii) $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

(iii) y er differentiabel og opfylder differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 + \tan^2(y))\sqrt{x}}, \quad (x \in]0, \infty[).$$

Bestem en forskrift for y som funktion af x .

OPGAVE 4 (20 point)

(a) Bestem på formen $w = x + iy$ samtlige komplekse tal w , der opfylder ligningen:

$$w^2 = -2i.$$

(b) Bestem samtlige komplekse tal z , der opfylder 2. grads ligningen:

$$z^2 + (1 + i)z + i = 0.$$

OPGAVE 5 (20 point)

- (a) Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2)}.$$

- (b) Bestem konstanten c således at funktionen

$$f(x) = c \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x + 1)(x^2 + 2)}, \quad (x \in [0, 1]),$$

er en tæthedsfunktion på $[0, 1]$.

Januar 2007**Opgave 1** (10 point)

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$y'' + y' - 6y = 0$$

som opfylder $y'(0) = 0$.

Opgave 2 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\ln(1 + 3x^2 + x^3 - x^4)}.$$

Opgave 3 (10 point)

Find alle komplekse tal z der opfylder

$$z^2 + 2z + 4 = 0.$$

Skriv svarene både på formen $a + ib$, med $a, b \in \mathbb{R}$, og på polær form.

Opgave 4 (10 point)

Lad $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + x - 3.$$

Vis at f er injektiv, angiv dens værdimængde $\text{Vm}(f)$ og bestem

$$(f^{-1})'(2).$$

Opgave 5 (10 point)

Find løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-1}y = \frac{1}{t+2}, \quad -2 < t < 1,$$

som opfylder $y(0) = 0$.

Opgave 6 (30 point)

Betragt funktionen $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

- (a) Find anden-ordens Taylor polynomiet af $f(x)$ omkring $x = 1$.
- (b) Bestem konstanten k således at funktionen

$$g(x) = k f(x), \quad \text{for } x \in [0, 2] \quad (*)$$

er en tæthedsfunktion.

- (c) Lad X være en stokastisk variabel med funktionen g i ligning $(*)$ som tæthedsfunktion. Find middelværdien $E(X)$ for X .

Marts 2007**Opgave 1** (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 0,$$

som opfylder $y(0) = 1$ og $y(1) = 0$.

Opgave 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x^2)}{\cos(x) - 1}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi.

Opgave 3 (20 point)

Betragt det komplekse tal $z_0 = \sqrt{3} + i$.

- (a) Bestem det komplekse tal $w = z_0^3$ både på polær form og på formen $a + ib$ med $a, b \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestem samtlige komplekse tal z , der løser 3. grads ligningen

$$z^3 = w,$$

og skitsér løsningerne på en tegning.

Opgave 4 (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x \cos(x^2 + 1)}{\cosh(y)},$$

som opfylder $y(0) = 1$.

Opgave 5 (10 point)

Om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vides at

- f er 3 gange kontinuert differentiabel,
- $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 3$, og
- $0 \leq f'''(x) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Bestem anden-ordens Taylor polynomiet $P_2(x)$ for f omkring 0 og brug Lagranges restled til at vise at

$$0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - P_2\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{48}.$$

Opgave 6 (20 point)

(a) Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{7x - 4}{x(x - 1)(x + 2)}.$$

(b) Bestem konstanten k således at funktionen

$$f(x) = k \frac{7x - 4}{x(x - 1)(x + 2)}, \quad x \in [2, 3]$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[2, 3]$.

Januar 2008**Opgave 1** (10 point)

Bestem løsningen til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 13y = 0,$$

som opfylder $y(0) = 0$ og $y'(0) = 6$.

Opgave 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin \theta)}{(\cos(\theta))^2}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi.

Opgave 3 (10 point)

Bestem i formen $x + iy$ alle komplekse tal z som opfylder

$$z^3 = -27i,$$

og skitsér løsningerne på en tegning.

Opgave 4 (10 point)

Bestem løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - \tan(x) y(x) = \sin(x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

som opfylder $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Opgave 5 (30 point)

Betragt funktionen

$$R(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

- (a) Bestem partialbrøksfremstillingen for $R(x)$.
- (b) Vis at $R(x)$ er aftagende for $x > 0$ og find

$$(R^{-1})' \left(\frac{8}{15} \right).$$

- (c) Bestem konstanten k således at $f(x) = k R(x)$ er en tæthedsfunktion på intervallet $[0, 1]$.

Opgave 6 (10 point)

Det er kendt at $f(x) = \sin(x)$ har lineæriseringen $L(x) = x$ omkring $x = 0$. Vis at $L(x)$ er også det anden grads Taylor polynomium for $f(x)$ omkring $x = 0$ og så vis at

$$x - \sin x < \frac{1}{6000}$$

når $x = 1/10$.

Marts 2008**Opgave 1** (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

som opfylder $y'(1) = 0$ og $y(1) = -1$.

Opgave 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin t)^2}{\ln(1 + t^2)}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi.

Opgave 3 (20 point)

- (a) Betragt det komplekse tal $w = 2 - 3i$. Bestem de tre komplekse tal $w + 1$, w^3 og $1/w$ hver i formen $x + iy$ og skitsér dem i den komplekse plan.
- (b) Bestem alle komplekse tal z der opfylder

$$|z + 1| = |z - 1|.$$

Opgave 4 (10 point)

Bestem konstanten k således at

$$f(x) = x \sin(x^2) + k, \quad \text{for } x \in [0, \sqrt{\pi/2}]$$

er en tæthedsfunktion på $[0, \sqrt{\pi/2}]$.

Opgave 5 (20 point)

Betragt funktionen

$$R(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}.$$

- (a) Bestem partialbrøksfremstillingen for $R(x)$.
- (b) Find løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = y(t)(y(t) - 1)(y(t) + 1)$$

som opfylder $y(0) = 1$.

Opgave 6 (10 point)

Om en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vides det

- f er 4 gange kontinuert differentiabel,
- $f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 3$, $f'''(1) = -4$, og
- $f'''(x) \leq 0$ for alle $x \in [-1, 1]$.

Bestem tredje-ordens Taylor polynomiet $P_3(x)$ for f omkring $x = 1$ og brug Lagranges restled til at vise at

$$f(0) \leq \frac{31}{6}.$$

Oktober 2008**Opgave 1** (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$y'' - 4y' + 29y = 0,$$

som opfylder $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$.

Opgave 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln(u)}{u^3 - u^2 + u - 1}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi. Her betegner $\ln$ den naturlige logaritme-funktion.

Opgave 3 (10 point)

Betragt det komplekse tal $u = 1 - 2i$. Bestem de tre komplekse tal $z = u + 1$, $w = u^2$ og $q = 1/(u + 1)$ hver i formen $x + iy$, med x, y reelle tal. Skitsér så z , w og q i den komplekse plan. Til sidst bestem et argument til z .

Opgave 4 (10 point)

Bestem Taylor polynomiet af grad 3 omkring $t = -1$ for funktionen

$$f(t) = \cosh(t^2 + t).$$

Opgave 5 (10 point)

Bestem løsningen $y(x)$ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$$

der opfylder $y(0) = 1$.

Opgave 6 (20 point)

Betragt funktionen

$$R(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}.$$

- (a) Bestem partialbrøksfremstillingen for $R(x)$.
- (b) Bestem konstanten k således at $f(x) = k R(x)$ er en tæthedsfunktion på intervallet hvor $2 \leq x \leq 4$.

Opgave 7 (10 point)

Bestem samtlige værdier af konstanten k således at funktionen

$$z = t^4 \sin(kx - 1)$$

af x og t opfylder partiell differentialligningen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + t \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Januar 2009**Opgave 1** (10 point)

Bestem den løsning til differentialligningen

$$y'' + 6y' - 16y = 0,$$

som opfylder $y(0) = 3$ og $y'(0) = -4$.

Opgave 2 (10 point)

Undersøg om grænseværdien

$$\lim_{t \rightarrow \pi/4} \frac{4(\sin t)^4 - 1}{\cos(2t)}$$

eksisterer, og bestem i bekræftende fald dens værdi.

Opgave 3 (10 point)

Bestem alle komplekse tal z som opfylder

$$z^4 = -81.$$

Skriv svarene i både rektangulær form $x + iy$ og polær form $re^{i\theta}$.

Opgave 4 (10 point)

Bestem løsningen $y(x)$ til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + y(x) = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

der opfylder $y(1) = 1$.

Opgave 5 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for funktionen

$$R(x) = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Opgave 6 (20 point)

(a) Bestem konstanten k så at funktionen

$$h(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad \text{for } x \in [0, 1], \quad (*)$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[0, 1]$.

- (b) Lad X være et stokastisk variabel med funktionen h i ligning (*) som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ af X .

Opgave 7 (10 point)

Det vides om en funktion $q(t)$ at

- (i) q er defineret og 3 gange kontinuert differentiabel for $-1 < t < 1$,
- (ii) $q(0) = 0$, $q'(0) = -1$, $q''(0) = 1$,
- (iii) $q'''(s) < 3$ for $0 < s < 1$.

Bestem anden-ordens Taylor polynomiet $P_2(t)$ for $q(t)$ omkring $t = 0$ og det tilhørende Lagrange restled. Brug disse udtryk til at gøre rede for at

$$q\left(\frac{1}{2}\right) < -\frac{5}{16}.$$

Oktober 2009**OPGAVE 1 (20 point)**

- (a) Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x) \cdot y(x) = \cos(x) \cdot (1 + \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Bestem derefter den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{1 - \cos(3x)}.$$

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 4, 5, 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en “god præstation” i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 4 (20 point)

- (a) Bestem konstanten A så funktionen

$$h(x) = Ax^2 + \frac{2x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[0, 1]$.

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $Var(X)$.

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem lineariseringen af funktionen $\arcsin(x)$ omkring $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

NB: Den givne funktion betegnes ofte som $\sin^{-1}(x)$.

OPGAVE 6 (10 POINT)

Lad w betegne det komplekse tal $w = 1 + i$. Bestem følgende fire komplekse tal på formen $a + ib$ (naturligvis med a og b reelle tal), og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan.

$$w^2, \quad w^2 + 2\bar{w}, \quad \pm\sqrt{-i \cdot (w^2 + 2\bar{w})}.$$

Facitliste oktober 2009**OPGAVE 1 (20 point)**

(a) Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + \cos(x) \cdot y(x) = \cos(x) \cdot (1 + \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

SVAR

$$y(x) = \sin(x) + Ce^{-\sin(x)}, \quad \text{hvor } C \text{ er en vilkårlig reel konstant.}$$

(b) Bestem derefter den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

SVAR

$$y(x) = \sin(x) + \frac{4}{e} \cdot e^{-\sin(x)} \quad (\text{kan også skrives som } \sin(x) + 4e^{-1-\sin(x)}).$$

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

SVAR:

$$R(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{1 - \cos(3x)}.$$

SVAR

To gange anvendelse af l'Hopitals regel viser, at grænseværdien er $-\frac{4}{9}$.

Opgavesættet (og facitter) fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 4, 5, 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en “god præstation” i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 4 (20 point)

- (a) Bestem konstanten A så funktionen

$$h(x) = Ax^2 + \frac{2x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[0, 1]$.

SVAR

$$A = 2.$$

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $Var(X)$.

SVAR

$$E(X) = \frac{13}{18}, \quad Var(X) = \frac{73}{1620}.$$

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem lineariseringen af funktionen $\arcsin(x)$ omkring $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

NB: Den givne funktion betegnes ofte som $\sin^{-1}(x)$.

SVAR

$$L(x) = \frac{-\pi}{3} + 2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Opgavesættet (og facitter) fortsættes på næste side.

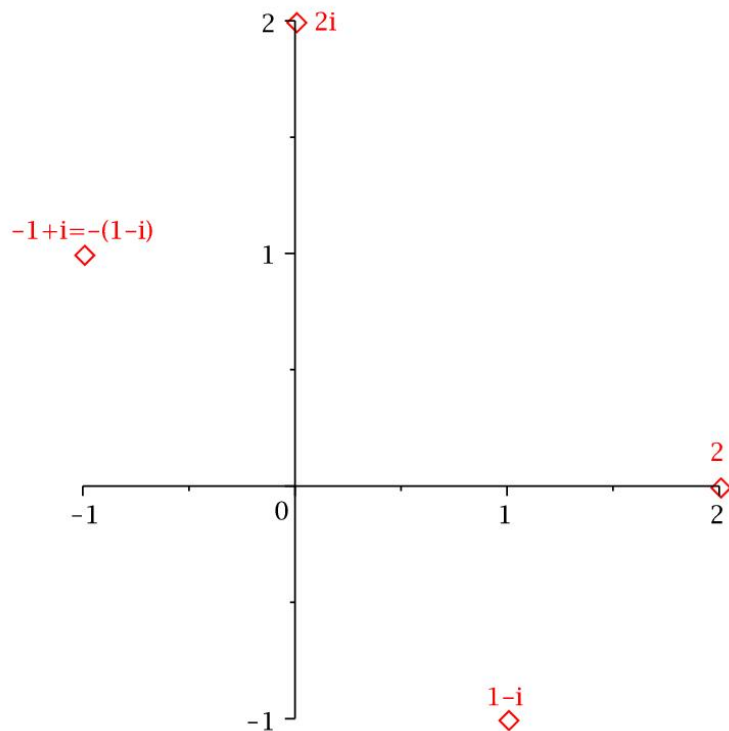
OPGAVE 6 (10 POINT)

Lad w betegne det komplekse tal $w = 1 + i$. Bestem følgende fire komplekse tal på formen $a + ib$ (naturligvis med a og b reelle tal), og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan.

$$w^2, \quad w^2 + 2\bar{w}, \quad \pm\sqrt{-i \cdot (w^2 + 2\bar{w})}.$$

SVAR

$$w^2 = 2i, \quad w^2 + 2\bar{w} = 2, \quad \pm\sqrt{-i \cdot (w^2 + 2\bar{w})} = \pm(1 - i).$$



5. januar 2010

OPGAVE 1 (20 point)

Betragt differentialligningen $y''(x) + 14y'(x) + 49y(x) = 0$.

- (a) Bestem samtlige løsninger.
- (b) Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{5x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x^2)}{1 - \cos(2x)}.$$

OPGAVE 4 (10 point)

Antag, at $f(t)$ er løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + \sin(t) \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Bestem fjerdegrads Maclaurinpolynomiet $P_4(t)$ for $f(t)$.

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 5 og 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en “god præstation” i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 5 (20 point)

I denne opgave betegner e som sædvanligt grundtallet for den naturlige logaritme.

- (a) Bestem konstanten C så funktionen

$$h(x) = \frac{C}{x}, \quad e \leq x \leq e^3,$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[e, e^3]$.

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $Var(X)$.

OPGAVE 6 (10 point)

Lad A være det komplekse tal $A = -16\sqrt{3} + 16i$. Omskriv A til polær form, og bestem dernæst samtlige rødder i ligningen $z^5 = A$.

Facit 5. januar 2010**OPGAVE 1 (20 point)**

Betragt differentialligningen $y''(x) + 14y'(x) + 49y(x) = 0$.

(a) Bestem samtlige løsninger.

SVAR: $y(x) = Ae^{-7x} + Bxe^{-7x}$, hvor A og B er vilkårlige konstanter.

(b) Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

SVAR: $y(x) = -6e^{7-7x} + 7xe^{7-7x}$.

OPGAVE 2 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{5x^2 - 9x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}.$$

SVAR: $R(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x}$.

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x^2)}{1 - \cos(2x)}.$$

SVAR: Værdien er $\frac{1}{2}$

OPGAVE 4 (10 point)

Antag, at $f(t)$ er løsning til begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + \sin(t) \cdot y'(t) + \cos(t) \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Bestem fjerdegrads Maclaurinpolynomiet $P_4(t)$ for $f(t)$.

SVAR: $P_4(t) = 1 + 2t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4$.

Opgavesættet fortsættes på næste side.

Om anvendelse af decimaltal i opgaverne 5 og 6:

Anvendes der decimaltal i svaret på et spørgsmål fra denne side, kan besvarelsen af spørgsmålet højst bedømmes som en “god præstation” i eksamensbekendtgørelsens forstand, svarende til karakteren 7.

OPGAVE 5 (20 point)

I denne opgave betegner e som sædvanligt grundtallet for den naturlige logaritme.

- (a) Bestem konstanten C så funktionen

$$h(x) = \frac{C}{x}, \quad e \leq x \leq e^3,$$

er en tæthedsfunktion på intervallet $[e, e^3]$.

SVAR: $C = \frac{1}{2}$.

- (b) Antag nu, at X er en stokastisk variabel med den netop bestemte $h(x)$ som tæthedsfunktion. Bestem middelværdien $E(X)$ og variansen $Var(X)$.

SVAR: $E(X) = \frac{1}{2}(e^3 - e)$, $Var(X) = \frac{1}{2}(e^4 - e^2)$.

OPGAVE 6 (10 point)

Lad A være det komplekse tal $A = -16\sqrt{3} + 16i$. Omskriv A til polær form, og bestem dernæst samtlige rødder i ligningen $z^5 = A$.

SVAR:

$$\begin{aligned} A &= 32e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ z_2 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}]}, \\ z_3 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5}]}, \\ z_4 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}]}, \\ z_5 &= 2e^{i[\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}]}. \end{aligned}$$

27. januar 2010**OPGAVE 1 (20 point)**Betragt differentialligningen $y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0$.

- (a) Bestem samtlige løsninger.
- (b) Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(\pi) = 0$ og $y'(\pi) = 2$.

OPGAVE 2 (20 point)Betragt andengradsligningen $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- (a) Bestem rødderne på formen $a + bi$, og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan.
- (b) Angiv rødderne på polær form.

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{2x^2 - 14x - 12}{x^3 - 2x^2 - 3x}.$$

OPGAVE 4 (20 point)Betragt funktionen $h(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestem lineariseringen for $h(x)$ omkring $x = 2$.
- (b) Gør rede for at $h(x)$ er voksende for alle x , og bestem differentialkvotienten

$$(h^{-1})'(19).$$

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2 - x^4}.$$

Facit 27. januar 2010**OPGAVE 1 (20 point)**

Betragt differentialligningen $y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0$.

- (a) Bestem samtlige løsninger.

SVAR: $y(x) = Ae^{-3x} \cos(2x) + Be^{-3x} \sin(2x)$, hvor A og B er vilkårlige reelle konstanter.

- (b) Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(\pi) = 0$ og $y'(\pi) = 2$

SVAR: $y(x) = e^{3\pi-3x} \sin(2x)$.

OPGAVE 2 (20 point)

Betragt andengradsligningen $z^2 + 4z + 8 = 0$.

- (a) Bestem rødderne på formen $a + bi$, og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan.

SVAR: Rødderne er $-2 + 2i$ og $-2 - 2i$. Skitsen udelades i denne facitliste.

- (b) Angiv rødderne på polær form.

SVAR:

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i} \quad -2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}.$$

OPGAVE 3 (10 point)

Bestem partialbrøksfremstillingen for den rationale funktion

$$R(x) = \frac{2x^2 - 14x - 12}{x^3 - 2x^2 - 3x}.$$

SVAR:

$$R(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-3}.$$

OPGAVE 4 (20 point)

Betragt funktionen $h(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestem lineariseringen for $h(x)$ omkring $x = 2$.

SVAR: $L(x) = 19 + 23(x - 2)$.

- (b) Gør rede for at $h(x)$ er voksende for alle x , og bestem differentialkvotienten

$$(h^{-1})'(19).$$

SVAR:

$h'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ er et "glad" andengradspolynomium med diskriminant -20. Derfor er $h'(x)$ altid positiv. Derfor er $h(x)$ voksende.

$$(h^{-1})'(19) = \frac{1}{23}.$$

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2 - x^4}.$$

SVAR: Grænseværdien er -1.

Juni 2010**Opgave 1**

Der er givet en stokastisk variabel X med værdiinterval $0 \leq x \leq b$, hvor b er en positiv konstant. Det oplyses, at tæthedsfunktionen for X har forskriften

$$f(x) = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

- (a) Bestem værdien af b .
- (b) Bestem middelværdien, variansen og spredningen af X .

Opgave 2

En reel funktion g er givet ved forskriften

$$g(t) = -t^3 - 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestem værdierne $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$.
Vis at g er aftagende.
- (b) Gør rede for, at g har en invers funktion, og bestem de to værdier

$$g^{-1}(1), \quad (g^{-1})'(1).$$

Opgave 3

Betragt differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2},$$

hvor $y = y(x)$ forudsættes > 0 for alle x .

- (a) Bestem den fuldstændige løsning.
- (b) Bestem også den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(1) = 2$.

Opgave 4

Lad funktionen f være givet ved forskriften $f(u) = \sqrt{u^2 + 4}$.

- (a) Bestem anden-ordens Taylorpolynomiet, $P_2(u)$, for f omkring 0.
- (b) Brug det fundne Taylorpolynomium til at beregne en tilnærmet værdi for $\sqrt{5}$.

Opgave 5

Betragt differentiaalligningen

$$4y''(t) - 20y'(t) + 25y(t) = 0.$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning.
- (b) Bestem samtlige løsninger, som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$y\left(\frac{2}{5}\right) = 0.$$

- (c) Bestem den løsning, som opfylder de to begyndelsesbetingelser

$$y\left(\frac{2}{5}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{2}{5}\right) = 1.$$

Facitliste juni 10

Opgave 1

Der er givet en stokastisk variabel X med værdiinterval $0 \leq x \leq b$, hvor b er en positiv konstant. Det oplyses, at tæthedsfunktionen for X har forskriften

$$f(x) = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

- (a) Bestem værdien af b .

SVAR: $b = 1$.

- (b) Bestem middelværdien, variansen og spredningen af X .

SVAR: $E(X) = \frac{7}{12}$, $Var(X) = \frac{11}{144}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{11}}{12}$.

Opgave 2

En reel funktion g er givet ved forskriften

$$g(t) = -t^3 - 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestem værdierne $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$.

Vis at g er aftagende.

SVAR: $g(-1) = 4$, $g(0) = 1$, $g(1) = -2$.

$g'(t) = -3t^2 - 2 < 0$ for alle t ; derfor er g aftagende.

- (b) Gør rede for, at g har en invers funktion, og bestem de to værdier

$$g^{-1}(1), \quad (g^{-1})'(1).$$

SVAR: Da g er aftagende, er g injektiv, og derfor har g en invers funktion.

$$g^{-1}(1) = 0, \quad (g^{-1})'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Opgave 3

Betragt differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2},$$

hvor $y = y(x)$ forudsættes > 0 for alle x .

- (a) Bestem den fuldstændige løsning.

SVAR: $y = \sqrt[3]{x^2 + x + A}$.

- (b) Bestem også den løsning, som opfylder begyndelsesbetingelsen $y(1) = 2$.

SVAR: $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 8}$.

Opgave 4

Lad funktionen f være givet ved forskriften $f(u) = \sqrt{u^2 + 4}$.

- (a) Bestem anden-ordens Taylorpolynomiet, $P_2(u)$, for f omkring 0.

SVAR: $P_2(u) = 2 + \frac{1}{4}u^2$.

- (b) Brug det fundne Taylorpolynomium til at beregne en tilnærmet værdi for $\sqrt{5}$.

SVAR: $P_2(1) = \frac{9}{4}$.

Opgave 5

Betragt differentialligningen

$$4y''(t) - 20y'(t) + 25y(t) = 0.$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning.

SVAR: $y(t) = Ae^{\frac{5t}{2}} + Bte^{\frac{5t}{2}}$.

- (b) Bestem samtlige løsninger, som opfylder begyndelsesbetingelsen

$$y\left(\frac{2}{5}\right) = 0.$$

SVAR: $y(t) = B\left(t - \frac{2}{5}\right)e^{\frac{5t}{2}}$.

- (c) Bestem den løsning, som opfylder de to begyndelsesbetingelser

$$y\left(\frac{2}{5}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{2}{5}\right) = 1.$$

SVAR: $y(t) = \left(t - \frac{2}{5}\right)e^{\frac{5t}{2}-1}$.

Del II

MM502 Calculus II

INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI
SYDDANSK UNIVERSITET

Skriftlig eksamen

MM502

tirsdag den 31. marts 2009 kl. 9.00–11.00

Om anvendelse af computer/symbolmanipulerende lommeregner ved eksamen

Det er tilladt at anvende computer (eller lommeregner), men **ikke** printer. Følgende grundregel gælder: Man må gerne bruge computeren til at udføre differentiationer, bestemme stamfunktioner og løse reelle ligningssystemer. Derimod vil besvarelser, som er baseret på mere avancerede funktioner (som f.eks. summation af uendelige rækker, bestemmelse af dobbelt- eller tripelintegraler, eller bestemmelse af en potentialfunktion) ikke blive accepteret.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladte.

Der lægges vægt på at besvarelserne er klart formulerede, og at argumentationen fremtræder tydeligt.

Opgavesættet består af 5 opgaver med i alt 10 delspørgsmål, der alle vægtes lige.

Den samlede pointsum i hele sættet er 80.

Der er 3 sider inklusive denne.

Marts 2006**OPGAVE 1 (20 point)**

En funktion $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = 9 - 2x + 12y - x^2 - 4y^3.$$

- (a) Find samtlige kritiske punkter for $f(x, y)$.
- (b) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

OPGAVE 2 (10 point)

Vi har en funktion $f(x, y)$ i to variable og danner en ny funktion $g(t)$ ved

$$g(t) = f(e^{5t}, t^2 - 2t + 1).$$

Bestem $g'(0)$, idet vi ved, at funktionen $f(x, y)$ er differentiabel, og at

$$\nabla f(1, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

OPGAVE 3 (20 point)

Et område D i planen er givet ved

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x \leq y\},$$

og et område V i rummet er givet ved

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq x(x^2 + y^2)\}.$$

- (a) Skitser D og beskriv D i polære koordinater.
- (b) Bestem volumet af V .

OPGAVE 4 (30 point)

Betragt de to plane vektorfelter

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= (4x + 5y^3 - 10xy, 15xy^2 - 5x^2 - 4y) \\ \mathbf{G}(x, y) &= (4x + 5y^3 - 10xy, 15xy^2 - 5x^2 - 4x)\end{aligned}$$

- (a) Vis at $\mathbf{G}(x, y)$ ikke er et konservativt vektorfelt.
- (b) Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$.
- (c) Angiv en normalvektor til niveaukurven for $\varphi(x, y)$ i punktet $(1, -1)$.

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} x^n = 1 + \frac{7}{2}x + \frac{7^2}{3}x^2 + \frac{7^3}{4}x^3 + \dots$$

OPGAVE 6 (10 point)

Bestem værdien af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{5^n}.$$

Besvarelse marts 2006

OPGAVE 1 (20 point)

En funktion $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = 9 - 2x + 12y - x^2 - 4y^3.$$

- (a) Find samtlige kritiske punkter for $f(x, y)$.
- (b) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

Svar: (i). Vi finder de partielt afledede

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= -2 - 2x, \\ f_2(x, y) &= 12 - 12y^2. \end{aligned}$$

De stationære punkter for $f(x, y)$ er netop løsningerne til ligningerne $f_1(x, y) = 0$ og $f_2(x, y) = 0$, og de findes til at være

$$\underline{\underline{(x, y) = (-1, 1)}}, \quad \underline{\underline{(x, y) = (-1, -1)}}.$$

(ii). De andenordensafledede af $f(x, y)$ findes:

$$\begin{aligned} A &= f_{11}(x, y) = -2, \\ B &= f_{12}(x, y) = 0, \\ C &= f_{22}(x, y) = -24y \end{aligned}$$

I punktet $(-1, 1)$ har vi $A = -2$, $B = 0$, $C = -24$, så $AC > B^2$ og $A < 0$, hvilket giver lokalt maximum.

I punktet $(-1, -1)$ har vi $A = -2$, $B = 0$, $C = 24$, så $AC < B^2$, hvilket giver saddelpunkt.

OPGAVE 2 (10 point)

Vi har en funktion $f(x, y)$ i to variable og danner en ny funktion $g(t)$ ved

$$g(t) = f(e^{5t}, t^2 - 2t + 1).$$

Bestem $g'(0)$, idet vi ved, at funktionen $f(x, y)$ er differentiabel, og at

$$\nabla f(1, 1) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Svar: Vi benytter *kædereglene*. Hvis vi sætter $u(t) = e^{5t}$ og $v(t) = t^2 - 2t + 1$, så er $g(t) = f(u(t), v(t))$, og dermed

$$\begin{aligned} g'(0) &= f_1(u(0), v(0)) \cdot u'(0) + f_2(u(0), v(0)) \cdot v'(0) \\ &= f_1(1, 1) \cdot u'(0) + f_2(1, 1) \cdot v'(0) \\ &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}, \end{aligned}$$

idet $u'(t) = 5e^{5t}$ og $v'(t) = 2t - 2$.

OPGAVE 3 (20 point)

Et område D i planen er givet ved

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq x \leq y\},$$

og et område V i rummet er givet ved

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq x(x^2 + y^2)\}.$$

- (a) Skitser D og beskriv D i polære koordinater.
- (b) Bestem volumet af V .

Svar: (i). (Skitse). I polære koordinater er D givet ved

$$0 \leq r \leq 2, \quad \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2.$$

- (ii). Volumenet bestemmes:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \iint_D x(x^2 + y^2) dA \\ &= \int_0^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} r \cos(\theta) r^2 r d\theta \\ &= \int_0^2 r^4 dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^2 \left[\sin(\theta) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{32}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{16(2 - \sqrt{2})}{5}}} \end{aligned}$$

OPGAVE 4 (30 point)

Betragt de to plane vektorfelter

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) &= (4x + 5y^3 - 10xy, 15xy^2 - 5x^2 - 4y) \\ \mathbf{G}(x, y) &= (4x + 5y^3 - 10xy, 15xy^2 - 5x^2 - 4x) \end{aligned}$$

- (a) Vis at $\mathbf{G}(x, y)$ ikke er et konservativt vektorfelt.
- (b) Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$.
- (c) Angiv en normalvektor til niveaukurven for $\varphi(x, y)$ i punktet $(1, -1)$.

Svar: (i). Det ses af nedenstående, at krydsdifferentiationsreglen ikke gælder for $\mathbf{G}(x, y)$, og $\mathbf{G}(x, y)$ derfor ikke er konservativ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) &= 15y^2 - 10x - 4, \\ \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) &= 15y^2 - 10x. \end{aligned}$$

(ii). En potentialfunktion $\varphi(x, y)$ bestemmes. Vi har

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y) = 4x + 5y^3 - 10xy,$$

hvilket implicerer, at

$$\varphi(x, y) = 2x^2 + 5xy^3 - 5x^2y + C(y),$$

for en passende funktion $C(y)$. Nu er

$$15xy^2 - 5x^2 + C'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y) = 15xy^2 - 5x^2 - 4y,$$

dvs. $C'(y) = -4y$. En løsning hertil er $C(y) = -2y^2$, som endelig giver

$$\underline{\underline{\varphi(x, y) = 2x^2 + 5xy^3 - 5x^2y - 2y^2.}}$$

(iii). Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$ står vinkelret på niveaukurverne til $\varphi(x, y)$. Derfor er $\underline{\underline{\mathbf{n} = \mathbf{F}(1, -1) = (9, 14)}}$ den ønskede normalvektor.

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} x^n = 1 + \frac{7}{2}x + \frac{7^2}{3}x^2 + \frac{7^3}{4}x^3 + \dots$$

Svar: Vi prøver at bestemme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1}/(n+2)}{7^n/(n+1)} = \frac{7^{n+1}(n+1)}{7^n(n+2)} = 7 \cdot \frac{n+1}{n+2} = 7 \cdot \frac{1+1/n}{1+2/n}.$$

Vi kan nu se, at

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \frac{1+1/n}{1+2/n} = 7.$$

Konvergensradius er derfor

$$\underline{\underline{R = 1/L = 1/7.}}$$

OPGAVE 6 (10 point)

Bestem værdien af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{5^n}.$$

Svar:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{5^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n}{5^n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \\&= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\&= \frac{2}{1 - 3/5} + \frac{3}{1 - 2/5} = \underline{\underline{10}}\end{aligned}$$

Juni 2006**OPGAVE 1 (20 point)**

En funktion $p(u, v)$ er givet ved

$$p(u, v) = uv + 1/u + 1/v, \quad u > 0, v > 0.$$

- (a) Find det/de kritiske punkter for $p(u, v)$.
- (b) Bestem arten af det/de kritiske punkter fundet ovenfor.

OPGAVE 2 (20 point)

Lad S være fladen i rummet givet ved $z = f(x, y)$ hvor $f(x, y) = \cos(x - y)$.

- (a) Bestem ligningen for den tangentplan til S , der går igennem punktet $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.
- (b) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(\frac{\pi}{2}, 0)$ hvor $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

OPGAVE 3 (15 point)

Betragt funktionen $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y, y^2 + x), \quad \mathbf{g}(x, y) = (x + y, x - y).$$

Find Jacobimatricerne $D\mathbf{f}(1, 1)$, $D\mathbf{g}(0, 2)$ og $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(1, 1)$.

OPGAVE 4 (15 point)

Lad V være området i rummet givet ved

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \quad z \geq 3\}.$$

Bestem rumfanget af V .

OPGAVE 5 (10 point)

Betragt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}.$$

Bestem ligningen for den feltlinie¹ til $\mathbf{F}(x, y)$, som går igennem punktet $(2, 1)$.

OPGAVE 6 (20 point)

Afgør om de to rækker nedenfor er konvergente.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1}$

¹Engelsk: field line

Marts 2007**OPGAVE 1 (30 point)**

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

- (a) Find gradienten $\nabla f(1, 2)$.
- (b) Find den retningsaffledede af $f(x, y)$ i punktet $(1, 2)$ i retningen $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.
- (c) Find en ligning for tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(1, 2, f(1, 2))$.
- (d) Angiv en enhedsvektor $\mathbf{v}$, som opfylder $D_{\mathbf{v}}f(1, 2) = 0$.
- (e) Find en ligning for tangentlinien til niveaukurven $f(x, y) = \ln(6)$ i punktet $(1, 2)$.

OPGAVE 2 (20 point)

En funktion $h(x, y)$ er givet ved

$$h(x, y) = 2x^2 + y^3 - x^2y - 3y.$$

- (a) Find samtlige kritiske punkter for $h(x, y)$.
- (b) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

OPGAVE 3 (10 point)

Vi har to funktioner $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, hvor $\mathbf{f}$ er givet ved udtrykket

$$\mathbf{f}(x, y) = (y \sin(x), x \cos(y)),$$

og hvor Jacobimatricen for $\mathbf{g}$ i punktet $(0, 0)$ er givet ved

$$D\mathbf{g}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Benyt disse oplysninger til at bestemme Jacobimatricen $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(0, 0)$ for den sammensatte funktion $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i punktet $(0, 0)$.

OPGAVE 4 (15 point)

Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_T xy \, dA,$$

hvor T er trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(2, 0)$ og $(2, 1)$.

OPGAVE 5 (25 point)

Betragt det plane vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (ay + \sin(y) - y \sin(x), x + x \cos(y) + \cos(x) + 1),$$

hvor a er et bestemt tal. Det oplyses, at $\mathbf{F}(x, y)$ er et konservativt vektorfelt.

- (a) Gør rede for, at $a = 1$.
- (b) Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$.
- (c) Bestem kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor C er kurven i planen med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (t(2\pi - t), t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Juni 2007**OPGAVE 1 (20 point)**

En funktion $g(x, y)$ er givet ved

$$g(x, y) = \ln(x^2 + y^4 - 1).$$

- (a) Find en ligning for tangentplanen for grafen for $g(x, y)$ i punktet $(1, 1, g(1, 1))$.
- (b) Bestem lineariseringen $L(x, y)$ for $g(x, y)$ udviklet i punktet $(1, 1)$.
- (c) Find en enhedsvektor $\mathbf{u}$ således, at $D_{\mathbf{u}}g(1, 1) = 0$.

OPGAVE 2 (20 point)

En funktion $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12x.$$

- (a) Find samtlige kritiske punkter for $f(x, y)$.
- (b) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

OPGAVE 3 (30 point)

Betragt de plane vektorfelter

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y) &= (ye^x + 2xy + 3x^2, -e^x + e^y + x^2), \\ \mathbf{G}(x, y) &= (ye^x + 2xy + 3x^2, e^x + e^y + x^2).\end{aligned}$$

- (a) Gør rede for, at $\mathbf{F}(x, y)$ ikke er konservativ.
- (b) Det oplyses, at vektorfeltet $\mathbf{G}(x, y)$ er konservativt. Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{G}(x, y)$.
- (c) Bestem kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor C er kurven i planen med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

- (d) Bestem kurveintegralet

$$\int_D \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor D er kurven i planen med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (1, t), \quad t \in [0, 1].$$

OPGAVE 4 (20 point)

- (a) Skitser området $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$, og beskriv D i polære koordinater.
- (b) Bestem volumenet af området

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq y\}.$$

OPGAVE 5 (10 point)

Bestem værdien af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 6^{n+1}}{7^{n-1}}.$$

Marts 2008**OPGAVE 1 (26 point)**

Svarene i denne opgave ønskes givet som eksakte værdier, ikke som decimaltal.

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}.$$

- (a) Bestem gradienten $\nabla f(2, 1)$.
- (b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(2, 1, f(2, 1))$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{v}}f(2, 1)$, når $\mathbf{v}$ er en enhedsvektor, som danner en vinkel på 60 grader med gradienten $\nabla f(2, 1)$.

OPGAVE 2 (13 point)

Lad $\mathbf{f}$ være en differentiabel funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, givet på formen

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ F_3(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det er oplyst, at

$$\mathbf{f}(0, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D(\mathbf{f})(0, 2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Angiv ud fra de givne oplysninger formelen for lineariseringen af funktionen $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ud fra punktet $(0, 2)$.
- (b) Bestem ud fra de givne oplysninger de omtrentlige koordinater til vektoren $\mathbf{f}(0.01, 1.97)$.

OPGAVE 3 (14 point)

Lad P betegne den plan i rummet $\mathbb{R}^3$, som er givet ved ligningen $2x + 2y + z = 2$.

- (a) Bestem koordinaterne til planens skæringspunkter med de tre koordinataksler.
Bestem også en ligning for planens skæringslinje med xy -planen.
- (b) Udregn tripelintegralet

$$\iiint_K x \, dV,$$

hvor K er den pyramide, som begrænses af planen P og de tre koordinatplaner.

OPGAVE 4 (20 point)

Betragt det plane vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + cye^x - e^{2y}, 2 + x + e^x - 2xe^{2y}),$$

hvor c er en reel konstant. Det oplyses, at feltet $\mathbf{F}(x, y)$ er konservativt.

- (a) Gør rede for, at $c = 1$.
- (b) Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$.
- (c) Bestem kurveintegralet

$$\int_P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor P er parabelbuen i planen med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4), \quad -2 \leq t \leq 2.$$

OPGAVE 5 (7 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5 + 2^i}{6^i}.$$

Besvarelse marts 2008**OPGAVE 1 (26 point)**

Svarene i denne opgave ønskes givet som eksakte værdier, ikke som decimaltal.

Betragt funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5y}.$$

- (a) Bestem gradienten $\nabla f(2, 1)$.
- (b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet $(2, 1, f(2, 1))$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{v}}f(2, 1)$, når $\mathbf{v}$ er en enhedsvektor, som danner en vinkel på 60 grader med gradienten $\nabla f(2, 1)$.

Svar opgave 1

- (a) $\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.
- (b) En ligning for tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet er $z = 3 + \frac{2}{3}(x-2) + \frac{5}{6}(y-1)$. Andre ligninger er lige så rigtige, fx $z = \frac{5}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y$ eller $6z = 5 + 4x + 5y$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $f(x, y)$ i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{v}}f(2, 1)$, når $\mathbf{v}$ er en enhedsvektor, som danner en vinkel på 60 grader med gradienten $\nabla f(2, 1)$.

OPGAVE 2 (13 point)

Lad $\mathbf{f}$ være en differentiabel funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, givet på formen

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \\ F_3(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det er oplyst, at

$$\mathbf{f}(0, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D(\mathbf{f})(0, 2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Angiv ud fra de givne oplysninger formelen for lineariseringen af funktionen $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ud fra punktet $(0, 2)$.
- (b) Bestem ud fra de givne oplysninger de omtrentlige koordinater til vektoren $\mathbf{f}(0.01, 1.97)$.

OPGAVE 3 (14 point)

Lad P betegne den plan i rummet $\mathbb{R}^3$, som er givet ved ligningen $2x + 2y + z = 2$.

- (a) Bestem koordinaterne til planens skæringspunkter med de tre koordinataksler.
Bestem også en ligning for planens skæringslinje med xy -planen.
- (b) Udregn tripelintegralet

$$\iiint_K x \, dV,$$

hvor K er den pyramide, som begrænses af planen P og de tre koordinatplaner.

OPGAVE 4 (20 point)

Betragt det plane vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (y + cye^x - e^{2y}, 2 + x + e^x - 2xe^{2y}),$$

hvor c er en reel konstant. Det oplyses, at feltet (x, y) er konservativt.

- (a) Gør rede for, at $c = 1$.
- (b) Find en potentialfunktion $\varphi(x, y)$ for vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y)$.
- (c) Bestem kurveintegralet

$$\int_P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor P er parabelbuen i planen med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4), \quad -2 \leq t \leq 2.$$

OPGAVE 5 (7 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{5 + 2^i}{6^i}.$$

Juni 2008**OPGAVE 1 (33 point)**

Betragt funktionen

$$h(x, y) = x^2 - 3x + 2xy + y^2 - y^3.$$

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(2, 1)$.
- (b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $h(x, y)$ i punktet $(2, 1, h(2, 1))$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestem samtlige kritiske punkter for $h(x, y)$.
- (e) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

OPGAVE 2 (13 point)

- (a) Skitser området $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, x + y \geq 0\}$ og beskriv det i polære koordinater.
- (b) Bestem værdien af dobbeltintegralet

$$\iint_D (x + y) \, dA.$$

OPGAVE 3 (20 point)

Et plant vektorfelt $\mathbf{F}$ er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \cos(y) \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}.$$

- (a) Gør rede for, at vektorfeltet ikke er konservativt.
- (b) Bestem en ligning for den feltlinie til $\mathbf{F}(x, y)$, som går gennem punktet $(1, \frac{\pi}{6})$.
- (c) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor L er det rette liniestykke fra punktet $(0, 0)$ til punktet $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

OPGAVE 4 (14 point)

Lad $\mathbf{H}$ være en differentiabel funktion af to variable $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Værdierne af funktionen $\mathbf{H}$ og dens gradient $\nabla \mathbf{H}$ er opgivet i to punkter:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(1, 0) &= 4, \\ \nabla \mathbf{H}(1, 0) &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0, 1) &= 0, \\ \nabla \mathbf{H}(0, 1) &= 3\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Lad

$$\begin{aligned}h(t) &= \mathbf{H}(\exp(4t), \sin(2t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ k(t) &= \mathbf{H}(\sin(t), 2t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- (a) Bestem differentialkvotienten $h'(0)$.
- (b) Bestem lineariseringen af $k(t)$ omkring $t = 0$.

Facitliste, juni 2008**OPGAVE 1 (33 point)**

Betragt funktionen

$$h(x, y) = x^2 - 3x + 2xy + y^2 - y^3.$$

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(2, 1)$.
- (b) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for $h(x, y)$ i punktet $(2, 1, h(2, 1))$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.
- (d) Bestem samtlige kritiske punkter for $h(x, y)$.
- (e) Bestem arten af hvert af de kritiske punkter.

Facitliste for opgave 1

- (a) $\nabla h(2, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- (b) En ligning for den søgte tangentplan er $z = 3x + 3y - 7$.
- (c) Den søgte retningsafledede er $-\frac{21}{13}$.
- (d) De kritiske punkter er $(\frac{1}{2}, 1)$ og $(\frac{5}{2}, -1)$.
- (e) $(\frac{1}{2}, 1)$ er et saddelpunkt og $(\frac{5}{2}, -1)$ er et lokalt minimumspunkt.

OPGAVE 2 (13 point)

- (a) Skitser området $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, x + y \geq 0\}$ og beskriv det i polære koordinater.
- (b) Bestem værdien af dobbeltintegralet

$$\iint_D (x + y) \, dA.$$

Facitliste for opgave 2

- (a) Jeg gider ikke indsætte figuren i denne fil.
I polære koordinater er grænserne $0 \leq r \leq 5$ og $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.
- (b) Integralets værdi er

$$\frac{250\sqrt{2}}{3}.$$

OPGAVE 3 (20 point)

Et plant vektorfelt $\mathbf{F}$ er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \cos(y) \mathbf{i} + 2x \mathbf{j}.$$

- (a) Gør rede for, at vektorfeltet ikke er konservativt.
- (b) Bestem en ligning for den feltlinie til $\mathbf{F}(x, y)$, som går gennem punktet $(1, \frac{\pi}{6})$.
- (c) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor L er det rette liniestykke fra punktet $(0, 0)$ til punktet $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Facitliste for opgave 3

- (a) Da $\frac{\partial}{\partial y} \cos(y) = -\sin(y)$ er forskellig fra $\frac{\partial}{\partial x} 2x = 2$, er vektorfeltet ikke konservativt.
- (b) En ligning for den søgte feltlinie er $\sin(y) = x^2 - \frac{1}{2}$.
- (c) Værdien er

$$1 + \frac{\pi^2}{4}$$

OPGAVE 4 (14 point)

Lad $\mathbf{H}$ være en differentiabel funktion af to variable $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Værdierne af funktionen $\mathbf{H}$ og dens gradient $\nabla \mathbf{H}$ er opgivet i to punkter:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(1, 0) &= 4, \\ \nabla \mathbf{H}(1, 0) &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(0, 1) &= 0, \\ \nabla \mathbf{H}(0, 1) &= 3\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Lad

$$\begin{aligned}h(t) &= \mathbf{H}(\exp(4t), \sin(2t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ k(t) &= \mathbf{H}(\sin(t), 2t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- (a) Bestem differentialkvotienten $h'(0)$.
- (b) Bestem lineariseringen af $k(t)$ omkring $t = 0$.

Facitliste for opgave 4

- (a) Differentialkvotienten er $h'(0) = 0$.
- (b) Lineariseringen af $k(t)$ omkring $t = 0$ er $L(t) = 3t$.

Marts 2009**OPGAVE 1 (16 point)**

En funktion $g(x, y)$ er givet ved

$$g(x, y) = xe^{-\left(\frac{1}{2}x^2+y^2\right)} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestem de kritiske punkter for $g(x, y)$.
- (b) Bestem arten af de kritiske punkter for $g(x, y)$.

OPGAVE 2 (16 point)

Lad S være den flade i rummet, som er givet ved ligningen $z = h(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

- (a) Bestem ligningen for den tangentplan til S , som går igennem punktet $(3, 2, h(3, 2))$.
- (b) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}(h)(3, 2)$, når retningen er bestemt af vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 3 (16 point)

To vektorfelter i planen er givet ved forskrifterne

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 4y^2 - 1 \\ 3x^2 + 8xy + 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 4y^2 - 1 \\ 3x^2 + 7xy + 2y \end{pmatrix}.$$

- (a) Vis, at ét af vektorfelterne ikke er konservativt.
- (b) Bestem en potentialfunktion for ét af vektorfelterne.

OPGAVE 4 (24 point)

Et område i planen er givet ved

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y\}.$$

- (a) Skitser området og beskriv det i polære koordinater.
- (b) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D x \, dA.$$

- (c) Bestem middelværdien af x over området D .

OPGAVE 5 (8 point)

Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3 \cdot 5^{n+2}}{7^{n+1}}.$$

Facitliste marts 09**OPGAVE 1 (16 point)**

En funktion $g(x, y)$ er givet ved

$$g(x, y) = xe^{-\left(\frac{1}{2}x^2+y^2\right)} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestem de kritiske punkter for $g(x, y)$.

SVAR: Der er to kritiske punkter, nemlig $(1, 0)$ og $(-1, 0)$.

- (b) Bestem arten af de kritiske punkter for $g(x, y)$.

SVAR: I $(1, 0)$ er der relativt maksimum. I $(-1, 0)$ er der relativt minimum.

OPGAVE 2 (16 point)

Lad S være den flade i rummet, som er givet ved ligningen $z = h(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

- (a) Bestem ligningen for den tangentplan til S , som går igennem punktet $(3, 2, h(3, 2))$.

SVAR: Ligningen er $z = 5 + \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{8}{5}(y - 2)$

- (b) Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}(h)(3, 2)$, når retningen er bestemt af vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den retningsafledede er $\frac{-13\sqrt{5}}{25}$.

OPGAVE 3 (16 point)

To vektorfelter i planen er givet ved forskrifterne

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 4y^2 - 1 \\ 3x^2 + 8xy + 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 4y^2 - 1 \\ 3x^2 + 7xy + 2y \end{pmatrix}.$$

- (a) Vis, at ét af vektorfelterne *ikke* er konservativt.

SVAR: Krydsdifferentiationstesten giver $\frac{\partial H_1}{\partial y} = 6x + 8y \neq 6x + 7y = \frac{\partial H_2}{\partial x}$.
Altså er $\mathbf{H}(x, y)$ ikke konservativt.

- (b) Bestem en potentialfunktion for ét af vektorfelterne.

SVAR: $\varphi(x, y) = 3x^2y + 4xy^2 - x + y^2$ er en potentialfunktion for $\mathbf{G}(x, y)$.

OPGAVE 4 (24 point)

Et område i planen er givet ved

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \leq y\}.$$

- (a) Skitser området og beskriv det i polære koordinater.

SVAR: Skitse findes på facitlistens sidste side.

Grænserne for de polære koordinater er $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$.

- (b) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D x \, dA.$$

SVAR: Integralets værdi er $\frac{-4}{3}$.

- (c) Bestem middelværdien af x over området D .

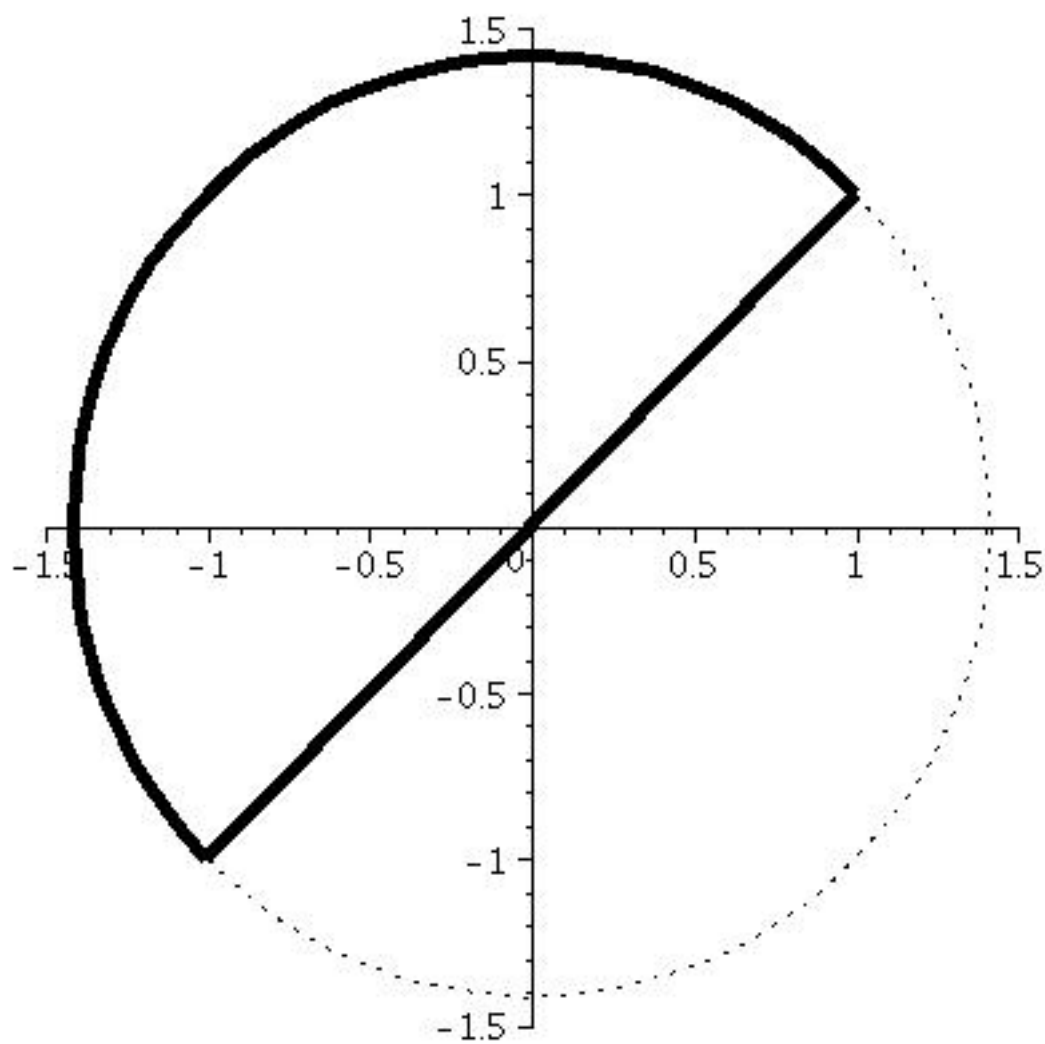
SVAR: Middelværdien er $\frac{-4}{3\pi}$.

OPGAVE 5 (8 point)

Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3 \cdot 5^{n+2}}{7^{n+1}}.$$

SVAR: Summen er $\frac{1879}{70}$.

Figur 0.1: Skitse af området D .

Juni 2009**OPGAVE 1 (16 point)**

Lad C være den niveaukurve for funktionen $h(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(x + y)$, som går gennem punktet P med koordinater $(\pi/2, -\pi/4)$.

- (a) Bestem en normalvektor til kurven C i punktet P .
- (b) Bestem en ligning for kurven C , og bestem en tangentvektor til C i punktet P .

OPGAVE 2 (16 point)

En funktion $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3 + 3y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestem de kritiske punkter for $f(x, y)$.
- (b) Bestem arten af de kritiske punkter for $f(x, y)$.

OPGAVE 3 (16 point)

Betragt en funktion $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ med en forskrift af formen

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det er oplyst, at

$$\mathbf{G}(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D(\mathbf{G})(0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem formelen for lineariseringen omkring punktet $(0, 1)$ for funktionen g .
- (b) Bestem ud fra lineariseringen den omtrentlige værdi for $g(-0.01, 1.02)$.

OPGAVE 4 (16 point)

Et område i planen er givet som

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

- (a) Skitser området D og bestem dets grænser i polære koordinater.
- (b) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dA.$$

OPGAVE 5 (16 point)

Et vektorfelt i 1. kvadrant er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 y \\ xy^3 \end{pmatrix}, \quad x > 0, y > 0.$$

- (a) Bestem kurveintegralet

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når L er liniestykket fra $(1, 1)$ til $(1, 3)$.

- (b) Bestem ligningen for den feltlinie for $\mathbf{F}$, som går gennem punktet $(1, 3)$.

Facitliste juni 09

OPGAVE 1 (16 point)

Lad C være den niveaukurve for funktionen $h(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(x + y)$, som går gennem punktet P med koordinater $(\pi/2, -\pi/4)$.

- (a) Bestem en normalvektor til kurven C i punktet P .

SVAR: Gradienten for en funktion står vinkelret på funktionens niveaukurver i ethvert punkt. Derfor er svaret $\text{grad}(h)(\pi/2, -\pi/4)$ som beregnes til $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Enhver vektor, som er proportional til den angivne vektor (og forskellig fra $\mathbf{0}$), er et lige så godt svar, fx. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Bestem en ligning for kurven C , og bestem en tangentvektor til C i punktet P .

SVAR: Ligningen for niveaukurven gennem P er $h(x, y) = h(\pi/2, -\pi/4)$, dvs

$$\sin(x) \cdot \cos(x + y) = \sqrt{2}/2.$$

Tværvektoren til en normalvektor, er en tangentvektor, så et svar er $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Også her er enhver dermed proportional vektor, som er forskellig fra $\mathbf{0}$, et lige så godt svar.

OPGAVE 2 (16 point)

En funktion $f(x, y)$ er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^3 + 3y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestem de kritiske punkter for $f(x, y)$.

SVAR: De kritiske punkter er $(0, 0)$ og $(-3/4, -1/2)$.

- (b) Bestem arten af de kritiske punkter for $f(x, y)$.

SVAR: Der er lokalt minimum i $(0, 0)$, og saddepunkt i $(-3/4, -1/2)$.

OPGAVE 3 (16 point)

Betragt en funktion $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ med en forskrift af formen

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det er oplyst, at

$$\mathbf{G}(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D(\mathbf{G})(0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem formelen for lineariseringen omkring punktet $(0, 1)$ for funktionen g .

SVAR: Lineariseringen for g er givet ved formelen $L(x, y) = 2 + 4x + 5(y - 1)$.

- (b) Bestem ud fra lineariseringen den omtrentlige værdi for $g(-0.01, 1.02)$.

SVAR: Den omtrentlige værdi er $L(-0.01, 1.02) = 2.06$.

OPGAVE 4 (16 point)

Et område i planen er givet som

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

- (a) Skitser området D og bestem dets grænser i polære koordinater.

SVAR: Skitsen er vedheftet. Grænserne er $1 \leq r \leq 2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

- (b) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D \frac{x}{1 + x^2 + y^2} dA.$$

SVAR: Værdien er $2 + \pi/2 - 2 \arctan(2)$ (≈ 1.3565).

OPGAVE 5 (16 point)

Et vektorfelt i 1. kvadrant er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 y \\ xy^3 \end{pmatrix}, \quad x > 0, y > 0.$$

- (a) Bestem kurveintegralet

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

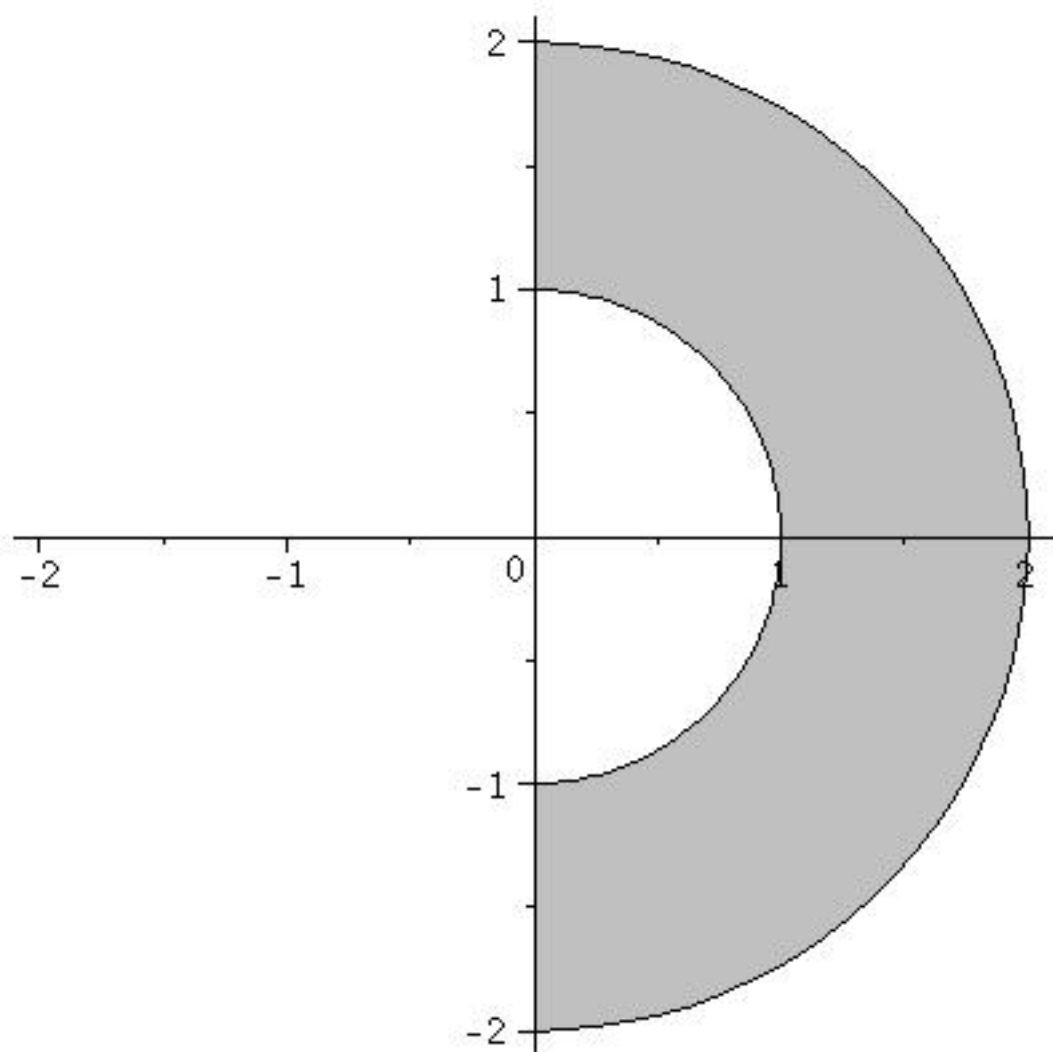
når L er liniestykket fra $(1, 1)$ til $(1, 3)$.

SVAR: Værdien er 20.

- (b) Bestem en ligning for den feltlinie for $\mathbf{F}$, som går gennem punktet $(1, 3)$.

SVAR: Ligningen er

$$y = \frac{3x}{3 - 2x}.$$

Figur 0.2: Skitse af området D .

April 2010**OPGAVE 1 (13 point)**

Betragt funktionen g , givet ved forskriften $g(x, y) = x^3 + x^2y - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Bestem de kritiske punkter for g .
- (b) Bestem arten af de kritiske punkter.

OPGAVE 2 (24 point)

Betragt funktionen

$$h(x, y) = \ln(3x + y^2), \quad x > 0.$$

Lad P betegne punktet med koordinater $(1, -2)$.

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(1, -2)$.
- (b) Bestem formelen for lineariseringen af $h(x, y)$ omkring punktet P .
- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet P , i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lad K være den niveaukurve for h , som går gennem P .

- (iv) Angiv en ligning for niveaukurven K .
Bestem en tangentvektor til K i punktet P .

OPGAVE 3 (13 point)

Lad kurven C være givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\ln(t+1), t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

og lad vektorfeltet $\mathbf{V}$ være givet ved forskriften

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ 2y + xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

- (a) Gør rede for, at $\mathbf{V}$ opfylder krydsdifferentiationsreglen, og bestem en potentialfunktion for $\mathbf{V}$.
- (b) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}.$$

OPGAVE 4 (12 point)

Lad P betegne den plan i rummet $\mathbb{R}^3$, som er givet ved ligningen $6x + 3y + z = 6$.

- (a) Bestem koordinaterne til planens skæringspunkter med de tre koordinataksler, og skitser den trekant, hvis hjørner er de tre skæringspunkter.
Bestem endvidere en ligning for planens skæringslinje med xy -planen.

- (b) Beregn tripelintegralet

$$\iiint_K y \, dV,$$

hvor K er den pyramide, som begrænses af planen P og de tre koordinatplaner.

OPGAVE 5 (12 point)

Lad D betegne det område i planen, som er beskrevet ved

$$D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0\}.$$

- (a) Skitser området D , og beskriv det i polære koordinater.
(b) Bestem værdien af dobbeltintegralet

$$\iint_D x(x^2 + y^2) dA.$$

OPGAVE 6 (6 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n+1}}.$$

Facitliste april 10

OPGAVE 1 (13 point)

Betragt funktionen g , givet ved forskriften $g(x, y) = x^3 + x^2y - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Bestem de kritiske punkter for g .

SVAR: Der er to kritiske punkter: $(0, 0)$ og $(-3, \frac{9}{2})$.

- (b) Bestem arten af de kritiske punkter.

SVAR: Standardtesten giver, at $(-3, \frac{9}{2})$ er et sadelpunkt.

Den giver ingen konklusion om $(0, 0)$. Men da $g(0, 0) = 0$, og $g(x, 0) = x^3$ antager både negative og positive værdier for vilkårligt små værdier af x , er $(0, 0)$ et sadelpunkt.

OPGAVE 2 (24 point)

Betragt funktionen

$$h(x, y) = \ln(3x + y^2), \quad x > 0.$$

Lad P betegne punktet med koordinater $(1, -2)$.

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(1, -2)$.

SVAR: Gradienten er $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

- (b) Bestem formelen for lineariseringen af $h(x, y)$ omkring punktet P .

SVAR: $L(x, y) = \ln(7) + \frac{3}{7}(x - 1) - \frac{4}{7}(y + 2) (= \ln(7) - \frac{11}{7} + \frac{3}{7}x - \frac{4}{7}y)$.

- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet P , i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den retningsafledede er $\frac{-5}{7}$.

Lad K være den niveaukurve for h , som går gennem P .

- (iv) Angiv en ligning for niveaukurven K .

Bestem en tangentvektor til K i punktet P .

SVAR: En ligning for K er $\ln(3x + y^2) = \ln(7)$. Ækvivalent hermed (og simplere) er ligningen $3x + y^2 = 7$.

En tangentvektor er fx. tværvektoren til gradientvektoren i punktet. Altså $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$. Mul-

tiplikation med 7 giver en pænere tangentvektor, nemlig $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 3 (13 point)

Lad kurven C være givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\ln(t+1), t), \quad 0 \leq t \leq 2,$$

og lad vektorfeltet $\mathbf{V}$ være givet ved forskriften

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ 2y + xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

- (a) Gør rede for, at $\mathbf{V}$ opfylder krydsdifferentiationsreglen, og bestem en potentialfunktion for $\mathbf{V}$.

SVAR: Man udregner

$$\frac{\partial(2y + xe^{xy})}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(ye^{xy})}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}.$$

De to udtryk er ens, så krydsdifferentiationsreglen gælder.

En potentialfunktion er

$$\varphi(x, y) = e^{xy} + y^2.$$

- (b) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}.$$

SVAR: Kurven starter i punktet $(0, 0)$ og ender i punktet $(\ln(3), 2)$. Integralets værdi er derfor $\varphi(\ln(3), 2) - \varphi(0, 0) = e^{2\ln(3)} + 2^2 - e^0 - 0^2 = 9 + 4 - 1 = 12$.

OPGAVE 4 (12 point)

Lad P betegne den plan i rummet $\mathbb{R}^3$, som er givet ved ligningen $6x + 3y + z = 6$.

- (a) Bestem koordinaterne til planens skæringspunkter med de tre koordinataksler, og skitser den trekant, hvis hjørner er de tre skæringspunkter.

Bestem endvidere en ligning for planens skæringslinje med xy -planen.

SVAR: De tre skæringspunkter har koordinaterne $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ og $(0, 0, 6)$.

Skitsen udelades i denne facitliste.

Linien har ligningen $y = -2x + 2$.

- (b) Beregn tripelintegralet

$$\iiint_K y \, dV,$$

hvor K er den pyramide, som begrænses af planen P og de tre koordinatplaner.

SVAR:

$$\iiint_K y \, dV = \int_0^1 dx \left(\int_0^{-2x+2} dy \left(\int_0^{6-6x-3y} y dz \right) \right) = 1.$$

OPGAVE 5 (12 point)

Lad D betegne det område i planen, som er beskrevet ved

$$D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0\}.$$

- (a) Skitser området D , og beskriv det i polære koordinater.

SVAR: Skitsen udelades i denne facitliste. Grænserne for de polære koordinater er

$$2 \leq r \leq 5, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (b) Bestem værdien af dobbeltintegralet

$$\iint_D x(x^2 + y^2) dA.$$

SVAR:

$$\iint_D x(x^2 + y^2) dA = \int_2^5 dr \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos(\theta) \cdot r d\theta \right) = \frac{6186}{5}.$$

OPGAVE 6 (6 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n+1}}.$$

SVAR: Summen er $\frac{3}{2}$.

Juni 2010**OPGAVE 1 (12 point)**

Betragt funktionen g , givet ved forskriften $g(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Bestem de kritiske punkter for g .
- (b) Bestem arten af de kritiske punkter.

OPGAVE 2 (18 point)

Betragt funktionen h med forskriften $h(x, y) = x^2 - y^2 - y^4$.

Lad P betegne punktet med koordinater $(-1, 1)$.

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(-1, 1)$.
- (b) Bestem formelen for lineariseringen af $h(x, y)$ omkring punktet P .
- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet P , i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

OPGAVE 3 (13 point)

Lad kurven K være givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\pi}{3}(1 - 2t), \pi(1 + t) \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

og lad vektorfeltet $\mathbf{V}$ være givet ved forskriften

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(x) - \cos(y) \\ 1 + \sin(x) + x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem en potentialfunktion for vektorfeltet $\mathbf{V}$.
- (b) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_K \mathbf{V} \bullet d\mathbf{r}.$$

OPGAVE 4 (13 point)

Betragt dobbeltintegralet

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} dA,$$

hvor

$$R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (a) Skitser området R , bestem dets areal, og anfør dets grænser i polære koordinater.
- (b) Udregn dobbeltintegralets værdi.
Bestem middelværdien af funktionen $\frac{1}{x^2+y^2}$ over området R .

OPGAVE 5 (12 point)

Betragt dobbeltintegralet

$$\iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA,$$

hvor C betegner cirkelskiven med centrum i punktet $(0,0)$ og radius 3, altså

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

- (a) Gør rede for, at dobbeltintegralet er *uegentligt*.
- (b) Bestem værdien af dobbeltintegralet (som et reelt tal eller ∞).

OPGAVE 6 (6 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^n}{5^{n+1}}.$$

OPGAVE 7 (6 point)

En funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + 2xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem Jacobimatricen $D\mathbf{F}(1, -2)$.

Facitliste juni 10**OPGAVE 1 (12 point)**

Betragt funktionen g , givet ved forskriften $g(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 6y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Bestem de kritiske punkter for g .
SVAR: De kritiske punkter er $(1, -1)$ og $(-1, 1)$.
- (b) Bestem arten af de kritiske punkter.
SVAR: Begge er saddepunkter.

OPGAVE 2 (18 point)

Betragt funktionen h med forskriften $h(x, y) = x^2 - y^2 - y^4$.

Lad P betegne punktet med koordinater $(-1, 1)$.

- (a) Bestem gradienten $\nabla h(-1, 1)$.
SVAR: Gradienten er $(-2, -6)$.
- (b) Bestem formelen for lineariseringen af $h(x, y)$ omkring punktet P .
SVAR: $L(x, y) = 3 - 2x - 6y$.
- (c) Bestem den retningsafledede af $h(x, y)$ i punktet P , i retningen bestemt af vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.
SVAR: Den retningsafledede er $-\frac{62}{13}$.

OPGAVE 3 (13 point)

Lad kurven K være givet ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{\pi}{3}(1 - 2t), \pi(1 + t) \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

og lad vektorfeltet $\mathbf{V}$ være givet ved forskriften

$$\mathbf{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(x) - \cos(y) \\ 1 + \sin(x) + x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem en potentialfunktion for vektorfeltet $\mathbf{V}$.

SVAR: $\varphi(x, y) = y + y \sin(x) - x \cos(y)$.

- (b) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\int_K \mathbf{V} \bullet d\mathbf{r}.$$

SVAR: Værdien er $\pi - \frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$.

OPGAVE 4 (13 point)

Betragt dobbeltintegralet

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} dA,$$

hvor

$$R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (a) Skitser området R , bestem dets areal, og anfør dets grænser i polære koordinater.

SVAR: Skitsen udelades her. Areal = 3π . Polære grænser $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- (b) Udregn dobbeltintegralets værdi.

Bestem middelværdien af funktionen $\frac{1}{x^2 + y^2}$ over området R .

SVAR: Dobbeltintegralet = $2\pi \ln(2)$. Middelværdien = $\frac{2\ln(2)}{3}$.

OPGAVE 5 (12 point)

Betragt dobbeltintegralet

$$\iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA,$$

hvor C betegner cirkelskiven med centrum i punktet $(0,0)$ og radius 3, altså

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

- (a) Gør rede for, at dobbeltintegralet er *uegentligt*.
SVAR: Dobbeltintegralet er uegentligt, fordi funktionen er udefineret i centrum af den cirkelskive, der integreres over.
- (b) Bestem værdien af dobbeltintegralet (som et reelt tal eller ∞).
SVAR: Værdien er 6π .

OPGAVE 6 (6 point)

- (a) Bestem summen af den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^n}{5^{n+1}}.$$

SVAR: Summen er $\frac{2}{3}$.

OPGAVE 7 (6 point)

En funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved forskriften

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + 2xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestem Jacobimatricen $D\mathbf{F}(1, -2)$.

$$\text{SVAR: } D\mathbf{F}(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & -8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$