MATEMATIKKENS HISTORIE 6/12

OVERSIGT.

Analyse i 1800-tallet: "Genindstallering af stingens i analysen"

- Uendelige rækker
- Cauchy def af
  i) grænseværdi
  ii) kontinuitet
  iii) konvergens

  + Differentialkvotient

  Integral (som summer)

- Problemer: skelner ikke mellem
  - kontinuitet i punkt eller globalt,
  - konvergens - uniform konvergens

- Desuden mangler IR

Løsning: Weierstrass (1815 - 1897) indfører uniform konvergens ~ (1850)

IR indføres af Dedekind ~ 1852

og senere af Cantor...

ARBEJDE MED UENDELIGE RÆKKER

UENDELIGE SUMMER DUKKER OP TIDLIGT, feks. i

ZENONS paradoks

ORESME viste i 1360 at rækken: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

er div.: $> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$

GREGORY OF ST. VINCENT viste hvordan Zenons paradoks kunne løses vha. geometrisk række. (1584-1667)

UENDELIGE RÆKKER SOM UDVIKLING AF FUNKTIONER:

- BLA. NEWTON, EULER, LAGRANGE

  Ingen betragtninger om hvorvidt række konvergerer mod funktion.

- Udtryk af π og e ved uendelige summer

MANIPULERING AF RÆKKER UDEN HENSYNTAGEN TIL KONVERGENS.

Jakob Bernoulli (slutn. 1600-tallet)

finder

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} \cdot \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \ldots$$

Dvs.: $$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots$$

$l = m = 1$:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Eller $= \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$?

GRANDI:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

indsættes 1 fås

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0$$

DERFOR "verden skabt ud af intet"!!

Også hos EULER er der forvirring.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

For $x = +2$: $-1 = 1 + 2 + 4 + 9 + \ldots$

"∞ er grænse mellem positive og negative tal"

NB! Enkelte matematikere udtykte restriktioner allerede i 1800-tallet, men ideer blev ikke udviklet. – eller hørt.

- konvergens, divergens
- 'konvergensradius'

Omkring 1810: Gauss, Fourier, Bolzano udvikler stringent behandling af uendelige rækker.

DEFINITIONER AF CAUCHY

(a) Limits and infinitesimals

When the values successively attributed to the same variable approach a fixed value indefinitely, in such a way as to end up by differing from it as little as one could wish, this last value is called the *limit* of all the others. So, for example, an irrational number is the limit of the various fractions which provide values that approximate it more and more closely. In geometry, the surface of a circle is the limit to which the surfaces of inscribed polygons converge as the number of the sides steadily increases, etc.

When the successive numerical values of the same variable decrease indefinitely in such a way as to fall below any given number, this variable becomes what one calls an *infinitesimal* or an *infinitely small* quantity. A variable of this kind has zero for its limit.

(b) Continuous functions

Among the objects which belong to the consideration of the infinitely small one must place notions relative to the continuity or discontinuity of functions. Let us first of all examine functions of a single variable from this point of view.

Let $f(x)$ be a function of the variable x and suppose that for each value of x between two given limits this function always takes a unique and finite value. If, having a value of x between these limits, one attributes to the variable x an infinitely small increase α, the function itself increases by the difference

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

which depends simultaneously on the new variable α and the value of x. This done, the function $f(x)$ will be, between the two limits assigned to the variable x, a *continuous* function of this variable if, for each value of x intermediate between these limits the numerical value of the difference

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decreases indefinitely with α. In other words, *the function $f(x)$ will remain continuous with respect to x between the given limits if, between these limits an infinitely small increase in the variable always produces an infinitely small increase in the function itself.*

CAUCHY

Mendelige rækker:

Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme;* (Intro til C. d'Analyse)

(c) *Convergence*

A *sequence* is an infinite succession of quantities $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ which succeed each other according to some fixed law. These quantities themselves are the different *terms* of the sequence considered. Let

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

be the sum of the first n terms, where n is some integer. If the sum s_n tends to a certain limit s for increasing values of n, then the series is said to be *convergent*, and the limit in question is called the *sum* of the series. On the contrary, if the [partial] sum s_n approaches no fixed limit as n increases indefinitely, the series is *divergent* and has no sum. In either case, the term corresponding to the index n, namley u_n, is called the *general term*. It suffices to give this general term as a function of the index n in order for the sequence to be completely determined.

By the principles established above, for the series

(1) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

to converge it is necessary and sufficient that the sum[s] $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ converge to a fixed limit s as n increases; in other words, it is necessary and sufficient that for infinitely large values of n the sums $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ differ from the limit s, and hence from each other, by infinitesimal quantities.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité ; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'*origine* $x = x_0$. Soit

$$(1) \qquad \mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) (vingt-deuxième Leçon)

$$(2) \qquad \mathcal{F}(x) = (x - x_0)\,f[x_0 + \theta(x - x_0)], \qquad \mathcal{F}(x_0) = 0,$$

θ étant un nombre inférieur à l'unité, et de la formule (7) (vingt-troisième Leçon)

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha\,f(x + \theta\alpha)$$

ou

$$(3) \qquad \mathcal{F}(x + \alpha) - \mathcal{F}(x) = \alpha\,f(x + \theta\alpha).$$

Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathcal{F}(x)$ sera non seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accrois-

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

Théorème I. — *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$;