Har du styr på det?

En matematik-guide

Flemming Clausen og Jesper Tolnø

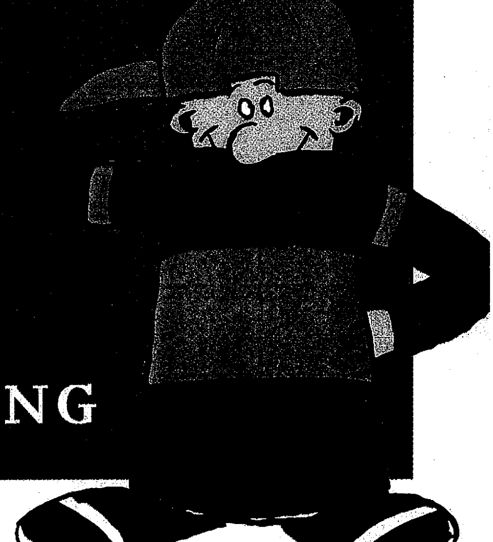
BRØKER

POTENSER

RØDDER

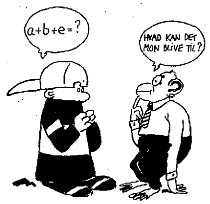
LIGNINGER

BOGSTAVREGNING



MUNKSGAARD

2. Algebra



I stedet for ordet *algebra* kan du tænke på ordet *bogstavregning*. Når du skal regne med udtryk, hvori der indgår bogstaver, er det vigtigt, at du kan skrive om på udtrykkene, så de bliver så simple som muligt. Processen med at forenkle udtrykkene kaldes *reduktion*.

2.1 Grundlæggende reduktion

Regler:

C1 Kun ensbenævnte størrelser kan adderes eller subtraheres.

C2 Parenteser ganges ud led for led.

C3 Fælles faktorer kan sættes uden for en parentes.

Uddybning

2a+5a=7a

2a og 5a er et eksempel på *ensbenævnte størrelser*, mens 2a og 5b ikke er det. C1 betyder, at fx 2a+5a kan reduceres til 7a, mens et udtryk som fx 2a+5b ikke kan reduceres.

Brug af C1

Eksempel:
$x+x+x=3x$, $2z+z-5z=-2z$,
$7s-3t-2s=5s-3t$, $6y-3-2y-y+12=3y+9$,
$3a-2+8b-5+a-9b=4a-b-7$, $4p-q-3r-4p+2q=q-3r$,
$-5c^2+6c^2+3c^2-8c^2+16c^2=12c^2$,
$3x^2-4x+8x^2-7x+5x-x^2=10x^2-6x$,
$7u^2-9v^2-3u^2+2v^2+13v^2=4u^2+6v^2$.

Øvelse 70: Reducér følgende udtryk så meget som muligt:

$a+a+a+a$,	$3c-c+4c$,
$r+r-7r$,	$3m+5m+7m-3m+11m$,
$6u-t-3u+4t$,	$7a+5b+3b+12a-10a+3b$,
$7p-4+p+11$,	$-4x-3y+9-x-4+y$,
$3q^2-4q^2+8q^2+q^2-6q^2$,	$-8n+n^2+7n^2+n-4n^2$,
$s^2-8t^2+5t^2+11s^2-2s^2+3t^2$.	

Som du kan se i margenen, er 2a det samme som $2\cdot a$. Med andre ord kan gangetegnet udelades, når det står mellem et tal og et bogstav. Gangetegnet kan også udelades, når det står mellem to bogstaver, foran en parentes eller mellem to parenteser, altså $a\cdot b=ab$, $4\cdot(a+b)=4(a+b)$ og $(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)(c+d)$.

$2a=a+a=2\cdot a$

Endvidere kan tallet 1 udelades, når det står foran et bogstav, dvs. $1a=a$.

$1a=1\cdot a=a$

C2 siger, at parenteser ganges ud led for led. Der kan være tale om, at et tal/bogstav skal ganges ind i en parentes, eller at flere parenteser skal ganges sammen.

Brug af C2

Eksempel:

$3(a+b)=3a+3b$,	$7(x-4)=7x-28$,
$(5+y)z=5z+yz$,	$(8-z)z=8z-z^2$,
$2(a-2b+c)=2a-4b+2c$,	$t(3s-5t+u)=3st-5t^2+tu$,
$3k(2m+9n-p)=6km+27kn-3kp$,	$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$,
$(2p+q)(r-s)=2pr-2ps+qr-qs$.	

Øvelse 71: Omskriv følgende udtryk ved hjælp af C2:

$5(s+t)$,	$7(u-8)$,	$(4-y)z$,	$(a+b)c$,
$(2+t)t$,	$7(2p-q-4r)$,	$x(6x-2y+7z)$,	$4a(b-7c+3d)$,
$(p+q)(r-s)$,	$(p-5q)(r+s)$.		

Udover C1 og C2 har du brug for reglerne fra kapitel 1, når du skal reducere et udtryk, fx reglen om at skifte fortegn, når man hæver en minusparentes, eller reglen om, at faktorernes orden er ligegyldig i et produkt. Sidstnævnte regel har vi faktisk allerede brugt i eksemplet ovenfor samt i facit til øvelse 71.

De vigtigste regler findes samlet bag i bogen

Brug af C1 og C2 og regler fra kapitel 1

Eksempel:
$9x-(3+x)=9x-3-x=8x-3$,
$5c-(7c-8)+(2c+3)=5c-7c+8+2c+3=11$,
$-(7d+3)-(-6-d)=-7d-3+6+d=-6d+3$,
$5(1+z)-2z=5+5z-2z=5+3z$,
$4y-3(1-y)=4y-3+3y=7y-3$,
$2a+3(b+2)+b-2(a+4)=2a+3b+6+b-2a-8=4b-2$,
$-(5a+3b)+(11a-4b)-(2a-5b)=-5a-3b+11a-4b-2a+5b$
$=4a-2b$,
$p(7+q)-3p=7p+pq-3p=4p+pq$,
$4(x-2(3-y))=4(x-(6-2y))=4(x-6+2y)=4x-24+8y$,

$$4(3x-y)-2(y+2x) = 12x-4y-(2y+4x) = 12x-4y-2y-4x = 8x-6y\,,$$
$$z(1-z+3y)+2z^2 = z-z^2+3yz+2z^2 = z^2+z+3yz\,,$$
$$(2p+q)(p-3q) = 2p^2-6pq+qp-3q^2 = 2p^2-3q^2-5pq\,,$$
$$\begin{aligned}(x-2y)(z+2x-y) &= xz+2x^2-xy-2yz-4yx+2y^2\\ &= 2x^2+2y^2-5xy+xz-2yz\,.\end{aligned}$$

Øvelse 72: Overvej hvilke regler, der er anvendt i hver af reduktionerne i eksemplet ovenfor.

Øvelse 73: Hæv parenteser, gang parenteser ud, og reducér så meget som muligt:

$7b-(17-4b)$,	$4a+(8-3a)-(7a-1)$,
$-(c-5)-(9+2c)$,	$2(a-b)+b$,
$5+(s-4)2$,	$-y+4(1-y)$,
$7x-9-3(x-6)+2$,	$-(2x-3y)+(7x+y)-(-x+4y)$,
$3c-2(a-2b+2c)-3b$,	$6(2z-x)-3(x-4z)$,
$c(2c-9+d)-5c$,	$(s-2t)(3s+4t)$,
$14-(7-t)(4+t)$,	$(x+y-3)(2-x)$.

Brug af C3

Ofte får du brug for *at sætte uden for en parentes*. Det kan lade sig gøre, hvis to eller flere *led*, som skal lægges sammen eller trækkes fra hinanden, har en fælles faktor. I udtrykket $7x-7y$ har leddene $7x$ og $7y$ den fælles faktor 7, og derfor gælder, at $7x-7y = 7(x-y)$. Hvis den fælles faktor er et negativt tal, skal du huske at skifte fortegn på leddene inde i parentesen, når du sætter uden for parentes: $-3x-3y = -3(x+y)$.

$12x = 4 \cdot 3x$

Lidt sværere er det at få øje på en fælles faktor i et udtryk som $12x+4y$. Men de to led $12x$ og $4y$ har 4 som fælles faktor, og udtrykket kan derfor skrives som $4(3x+y)$.

At sætte uden for en parentes

Eksempel:

$9a+9b = 9(a+b)$,	$-9a-9b = -9(a+b)$,
$7x+7 = 7x+7\cdot 1 = 7(x+1)$,	$17x+xy = x(17+y)$,
$xy-xz = x(y-z)$,	$p^2+pq = p(p+q)$,
$16+4z = 4(4+z)$,	$-15s-9 = -3(5s+3)$,
$8t^2-4t+6 = 2(4t^2-2t+3)$,	$6t-8tu = 2t(3-4u)$,
$12u^2+9ru = 3u(4u+3r)$,	$pq^3+p^2q = pq(q^2+p)$,
$m^7n^9+m^5n^4 = m^5n^4(m^2n^5+1)$,	$a^6b^5-a^9b^4 = a^6b^4(b-a^3)$,

$x^7y^2-x^4y^8+x^6y^3 = x^4y^2(x^3-y^6+x^2y)$,
$ct^6u^4+ct^2u^7 = ct^2u^4(t^4+u^3)$.

Øvelse 74: Sæt uden for en parentes:

$7p+7q$,	$-7p-7q$,	$4y-4$,	$8b+ab$,
$ab+ac$,	s^2-6s ,	$3x-6$,	$14+7z$,
$-20t-5$,	$4u^2+16u-8$,	$-2x^2-2x+4$,	$6rs+12s$,
$21tu-7u^2$,	a^2b+ab^2 ,	$x^4y^3+x^3y^2$,	$u^4v^9-u^7v^5$,
$c^3d^6-c^7d^8+c^4d^5$,	$mn^3+m^7n^4-m^2n^8$,	$ks^3t^3+ks^2t^4$,	$a^3bc+a^2b^7c$.

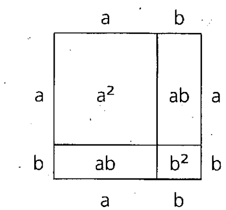
Kvadratregler:

C4 $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
C5 $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
C6 $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

C4 og C5: Kvadratet på en toleddet størrelse

C6: To tals sum gange de samme to tals differens

C4 udtrykkes i ord således: *Kvadratet på en toleddet størrelse* er lig det første led i anden plus det andet led i anden plus det dobbelte produkt af leddene. C5 udtrykkes på helt samme måde, blot skal det til sidst være minus det dobbelte produkt. C6 kan i ord formuleres som følger: *To tals sum gange de samme to tals differens* er lig det første tal i anden minus det andet tal i anden.



At de tre kvadratregler faktisk er rigtige, kan man overbevise sig om ved at gange parenteserne ud på venstre side af lighedstegnet (se øvelse 75). Man kan også vælge i stedet at indse reglerne ved hjælp af et geometrisk argument, jf. figuren i margenen.

At C4 er rigtig indses således: Arealet af det store kvadrat er $(a+b)^2$. Dette areal må være lig summen af arealerne af de 4 mindre firkanter, nemlig de to kvadrater med areal a^2 og b^2 samt de to rektangler, der hver især har arealet ab. Altså er $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

Øvelse 75: Gang parenteserne på venstre side af lighedstegnet i henholdsvis C4, C5 og C6 ud, reducér, og se, om du kan få det, der står på højre side.

Eksempel: Brug af C4, C5 og C6:

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, $(t+6)^2 = t^2+6^2+2(6t) = t^2+36+12t$,
$(3-u)^2 = 3^2+u^2-2(3u) = 9+u^2-6u$, $(p-q)^2 = p^2+q^2-2pq$,
$(c-7)^2 = c^2+7^2-2(7c) = c^2+49-14c$, $(s+t)(s-t) = s^2-t^2$,
$(5+x)(5-x) = 25-x^2$, $(z-6)(z+6) = (z+6)(z-6) = z^2-36$,

$$\begin{aligned}(3-a)^2+(a+4)(a-4) &= 3^2+a^2-2(3a)+a^2-4^2 = 9+a^2-6a+a^2-16\\ &= 2a^2-6a-7\,,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(c+d)^2-(c+d)(c-d) &= c^2+d^2+2cd-(c^2-d^2) = c^2+d^2+2cd-c^2+d^2\\ &= 2d^2+2cd\,.\end{aligned}$$

Øvelse 76: Udregn følgende udtryk:

$(s+t)^2$,	$(4+x)^2$,	$(y-z)^2$,
$(r-5)^2$,	$(y+9)^2$,	$(8-r)^2$,
$(y+z)(y-z)$,	$(p+3)(p-3)$,	$(7-q)(7+q)$,
$(x+4)^2+(x+6)(x-6)$,	$(u+v)^2-(u-v)^2$,	$(x-y)^2-(x+y)(x-y)$.

Fortsat brug af C4, C5 og C6

Eksempel: Betragt $(2a+3b)^2$. Dette er kvadratet på en toleddet størrelse, og du skal bruge C4 til at regne det ud. Her skal du være opmærksom på, at det første led er 2a, og det andet led er 3b. Det første led i anden bliver derfor $(2a)^2=(2a)(2a)=4a^2$, og det andet led i anden bliver $(3b)^2=(3b)(3b)=9b^2$. Alt i alt er $(2a+3b)^2=(2a)^2+(3b)^2+2(2a)(3b)=4a^2+9b^2+12ab$.

I de følgende udregninger skal du gå frem på samme måde:

$(4y+7)^2=(4y)^2+7^2+2(28y)=16y^2+49+56y$,
$(x-2y)^2=x^2+(2y)^2-2x(2y)=x^2+4y^2-4xy$,
$(4p+q)(4p-q)=(4p)^2-q^2=16p^2-q^2$,
$(5s+8t)(5s-8t)=(5s)^2-(8t)^2=25s^2-64t^2$,
$(3-5z)(3+5z)=3^2-(5z)^2=9-25z^2$.

Øvelse 77: Udregn følgende udtryk:

$(s+2t)^2$,	$(4x+2y)^2$,	$(3c-4d)^2$,
$(6-3a)^2$,	$(p+3q)(p-3q)$,	$(7z-2)(7z+2)$,
$(5a+4b)(5a-4b)$,	$(b+3)^2+(2b+5)(2b-5)$.	

Omvendt brug af C4, C5 og C6

Reglerne C4, C5 og C6 kan bruges »den anden vej«: Udgangspunktet er i så fald et udtryk, der svarer til et af dem på højresiden af lighedstegnene, og du skal så omskrive dette udtryk til det, der står på venstresiden.

Eksempel:

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$, $m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$,
$r^2+s^2-2rs=(r-s)^2$, $x^2+4y^2+4xy=x^2+(2y)^2+2x(2y)=(x+2y)^2$,
$c^2+16+8c=c^2+4^2+2(4c)=(c+4)^2$,
$4a^2-12a+9=(2a)^2+3^2-2(2a)3=(2a-3)^2$,
$9x^2+25y^2+30xy=(3x)^2+(5y)^2+2(3x)(5y)=(3x+5y)^2$,
$64-48t+9t^2=8^2+(3t)^2-2\cdot 8(3t)=(8-3t)^2$,
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, $x^2-4=(x+2)(x-2)$,
$36-u^2=6^2-u^2=(6+u)(6-u)$,
$49p^2-64q^2=(7p)^2-(8q)^2=(7p+8q)(7p-8q)$.

Øvelse 78: Omskriv følgende udtryk ved at bruge C4, C5 eller C6:

s^2+t^2+2st,	m^2+n^2-2mn,	$z^2+25+10z$,
$9x^2+y^2-6xy$,	$16y^2+40y+25$,	$36-12r+r^2$,
$49p^2+9q^2-42pq$,	c^2-d^2,	$64-t^2$,
$4x^2-36$,	$25x^2-81y^2$.	

Check din grundlæggende reduktion

Øvelse 83: Reducér følgende udtryk så meget som muligt:

$b+b+b+b+b$,	$8d-2d+5d$,
$s-7s+4s$,	$8t-17t+t-3t+9t+5t$,
$9x-3y-2x+4y$,	$8p-q-4q+7p+3q-2p$,
$14+3z-9-7z$,	$-2a-5b+8+a-3b-11$,
$-3z+3x-7y-8y-x+2z$,	$x^2-4x^2-11x^2+3x^2+5x^2$,
$-y^2+15y^2-5y+y-4y^2+19y$,	$3a^2-7b^2+5b^2-18a^2+2a^2+3b^2$.

Øvelse 84: Gang parenteserne ud i følgende udtryk:

$3(a+b)$,	$9(6-c)$,	$(7-d)8$,
$x(y+z)$,	$(4+x)x$,	$s(s-3)$,
$6(3p-2r)$,	$5(4r-9s+5t)$,	$p(9p+3q-2r)$,
$6a(7b-c-6d)$,	$(p-q)(x+y)$,	$(3+t)(7-s)$,
$(2a-3b)(6+c)$,	$(9-4x)(x+z)$,	$(3y+z)(4r-2s)$.

Øvelse 85: Hæv parenteser, gang parenteser ud, og reducér derefter så meget som muligt:

$7x-(8-3x)$,	$9x+(7-4x)-(x-5)$,
$-(y-13)-(6-6y)+8y$,	$6(y+4)-18$,
$11+(z-5)4$,	$3(a-b)-4a$,
$8c-2(4-c)$,	$4s-8+5(3+s)-7$,
$-(4t-3u)+(8t-9u)-(-2t+u)$,	$6r-4(r-t)+9t$,
$3(2x+y)+4(x-7y)$,	$9(z-y)-2(3y+5z)$,
$x(7x-2+y)-3x$,	$(p-5q)(4p+6q)$,
$22-(t-7)(5+2t)$,	$(x-6)(7-2x+8y)$.

Øvelse 86: Sæt uden for en parentes:

$5p+5q$,	$-3x-3y$,	$8a+8$,	$6s-rs$,
$pq+qr$,	a^2+4a,	$9+3z$,	$12b-6$,
$-25-5c$,	$14a-7b$,	$18x+6+12y$,	$12z^2-8z+16$,
$-3c^2+6c-3$,	$7rt+28t$,	$24x^2-6xy$,	$3ab-9b^2+6b$.

Øvelse 87: Udregn følgende udtryk:

$(a+b)^2$,	$(a-2b)^2$,	$(c+8)^2$,
$(5c-9d)^2$,	$(7-x)^2$,	$(x+2y)^2-(x-y)^2$,
$(5p+q)(5p-q)$,	$(7-8r)(7+8r)$,	$(3a+6b)(3a-6b)$,
$(y-3z)^2+(2y+z)(2y-z)$,	$(4s+2)(4s-2)-(3s+5)^2$.	

Øvelse 88: Omskriv til kvadratet på en toleddet størrelse eller til to tals sum gange de samme to tals differens:

p^2+q^2+2pq,	x^2+y^2-2xy,	a^2+4b^2+4ab,	$36c^2+25d^2-60cd$,
$q^2+81+18q$,	$49p^2-56p+16$,	$64+32t+4t^2$,	m^2-n^2,
r^2-25,	$9-s^2$,	$49-16x^2$,	$64y^2-25z^2$.

Øvelse 89: Omskriv følgende udtryk ved hjælp af potensreglerne:

$a^2 \cdot a^7$, $b^8 \cdot b^{-3} \cdot b^4$, $c^6 \cdot c^{-5} \cdot c^{-9}$,
$a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$, $b^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{3}{4}}$, $(x^3)^{-5}$,
$(y^{-7})^{-2}$, $(z^{-\frac{3}{4}})^{12}$, $(p^{\frac{1}{2}})^8$,
$(q^{\frac{2}{5}})^{\frac{2}{3}}$, $(r^{\frac{2}{3}})^{\frac{7}{4}}$, $q^4 \cdot r^4$,
$s^7 \cdot r^7 \cdot t^7$, $(3x)^4$, $(5y)^3$,
$(xy)^{-6}$, $(yz)^4 \cdot y^{-7} \cdot z^2$, $t^9 \cdot (tu)^{-6} \cdot u^4 \cdot t^{-3}$,
$\frac{p^7}{q^7}$, $\frac{p^4}{p^9}$, $\frac{r^3}{r^{-5}}$,
$\frac{m^{-3}}{(m^{-2})^6}$, $\frac{(n^4)^2}{(n^5)^{-4}}$, $\frac{(mn)^{-1}}{m^3 \cdot n^5}$,
$\frac{(ab)^8}{a^6 \cdot b^8}$, $\frac{c^{-5} \cdot d^3}{(cd)^{-2}}$, $\frac{p^{-1} \cdot q^4}{p^{-3} \cdot q^{-2}}$,
$\frac{(x^{-7})^2 \cdot y^5}{x^{-1} \cdot (y^{-1})^4}$.

Øvelse 90: Omskriv følgende udtryk ved hjælp af rodreglerne:

$\sqrt[4]{xy}$, $\sqrt{64z}$, $\sqrt{81a^2}$, $\sqrt[3]{8d^3}$, $\sqrt[7]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[4]{\frac{b}{16}}$, $\sqrt[3]{\frac{27}{d^3}}$.

Øvelse 91: Omskriv rødder til potenser, og reducér så meget som muligt:

$\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[9]{y^2}$, $\sqrt[3]{z^9}$, $\sqrt{a^4}$, $b \cdot \sqrt[5]{b}$,
$\sqrt[8]{c^6} \cdot c^{\frac{3}{4}}$, $d^4 \cdot \sqrt{d} \cdot d^3$, $p^5 \cdot \sqrt[6]{p} \cdot p^{\frac{1}{3}}$, $\frac{q^{-8}}{q^2 \cdot \sqrt{q}}$, $\frac{\sqrt[6]{r^2} \cdot r^{\frac{8}{3}}}{r^{-1}}$,
$\sqrt[12]{(st)^{10}} \cdot t^{\frac{1}{6}}$, $t^7 \cdot \sqrt{u} \cdot \sqrt[8]{(tu)^4}$, $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot b^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{(ab)^{-1}}}$.

Øvelse 92: Omskriv potenser til rødder:

$d^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{6}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $y^{\frac{8}{9}}$, $c^{\frac{27}{14}}$, $t^{\frac{3}{34}}$, $b^{-\frac{1}{2}}$, $p^{-\frac{1}{4}}$, $q^{-\frac{4}{5}}$, $u^{-\frac{8}{7}}$, $r^{-\frac{31}{2}}$.

Check din videregående reduktion

Øvelse 102: Reducér følgende udtryk så meget som muligt:

$\frac{3a-8}{2}+\frac{5-a}{4}$, $\frac{z-7}{10}+\frac{4z+9}{5}$, $\frac{7p-8q}{4}+\frac{3p+q}{3}$,
$\frac{5x+2y}{6}+\frac{3x-4y}{5}$, $\frac{7b-7}{3b}+\frac{6+2b}{b}$, $\frac{3r-s}{6r}+\frac{r-5s}{3r}$,
$\frac{2t+9u}{4t}+\frac{-4t-3u}{2t}+\frac{5t+u}{3t}$, $\frac{7+6v}{v}+\frac{2v-17}{4}$, $\frac{5-3d}{6}+\frac{2d^2+8}{3d}$,
$\frac{x+6y}{x}+\frac{7x-y}{y}$.

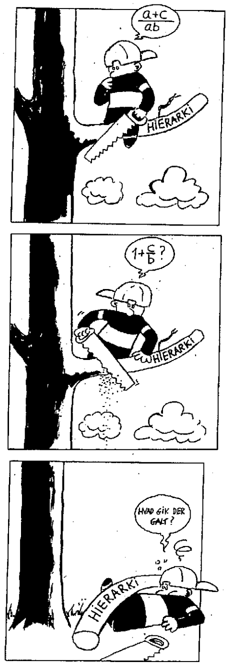
Øvelse 103: Reducér følgende udtryk så meget som muligt:

$\frac{4m+3}{8}-\frac{3m+8}{4}$, $\frac{9-2c}{3}-\frac{6-5c}{6}$, $\frac{6a-2b}{5}-\frac{a+8b}{4}$,
$\frac{9-n}{2n}-\frac{4n+6}{3n}$, $\frac{7}{4}-\frac{2d+5}{d}$, $\frac{8x+y}{3y}-\frac{3x-4y}{2x}$,
$\frac{-s-2t}{2}-\frac{3t-7s}{3}-\frac{5s+4t}{4}$, $\frac{7-3z}{10z}-\frac{4}{5}+\frac{8z+2}{z}$,
$\frac{p+q}{4p}+\frac{7p-4q}{6p}-\frac{5q-2p}{3p}$, $\frac{6u-v}{u}+\frac{3v}{2u}-\frac{9u}{v}$.

Øvelse 104: Reducér følgende udtryk:

$\frac{2p-5q}{3q}+\frac{7p+3q}{2p}$, $\frac{6a+2}{a+7}-\frac{14}{a-4}$, $\frac{3m+n}{m-n}+\frac{4m-2n}{m+2n}$,
$\frac{8+5b}{4b+4}+\frac{b-3}{b+1}$, $\frac{13-5y}{y^2-7y}+\frac{8}{y-7}$, $\frac{3x-2}{6-3x}-\frac{1-x}{2x-x^2}$.

Vink: I de 3 sidste kan du sætte uden for en parentes i nævneren



Øvelse 105: Brug C6 til at sætte på fælles brøkstreg, og reducér derefter så meget som muligt:

$$\frac{3+p}{p^2-1}+\frac{2p-4}{p-1},\quad \frac{15}{q+4}-\frac{7q-5}{q^2-16},\quad \frac{1}{x-y}-\frac{x}{x^2-y^2},\quad \frac{uv}{u^2-v^2}-\frac{v}{u+v}.$$

Øvelse 106: Omskriv følgende udtryk ved at sætte på fælles brøkstreg, og reducér derefter så meget som muligt:

$$8+\frac{5}{y},\quad \frac{3z-4}{z}-2,\quad 6x+\frac{x-8}{5},\quad 7-\frac{3a+b}{a},\quad \frac{6p-9q}{4}-2p,$$
$$1+\frac{8c+3}{7-4c},\quad \frac{5d}{d+3}-5,\quad 3-\frac{18}{7-2y},\quad \frac{m(5m-2n)}{m+4n}-2m.$$

Øvelse 107: Forkort følgende brøker:

$$\frac{s}{s^2},\quad \frac{u^6}{u},\quad \frac{a^8}{a^4},\quad \frac{b^3}{b^9},$$
$$\frac{y}{xy},\quad \frac{yz}{y},\quad \frac{pV}{rV},\quad \frac{3Ut}{6t},$$
$$\frac{pq^4}{p^2\cdot q^2},\quad \frac{u^7\cdot v^7}{u^3\cdot v^6},\quad \frac{m-n}{(m-n)^3},\quad \frac{(b+d)^6}{(b+d)^2},$$
$$\frac{4(s-t)^2}{12(s-t)^4},\quad \frac{yz(y+z)^5}{yz^3\cdot(y+z)^4},\quad \frac{p^9\cdot q^7\cdot(p-q)^4}{p^6\cdot q^8\cdot(p-q)^6},\quad \frac{t^2\cdot u\cdot(4t-u)^7}{t^5\cdot u\cdot(4t-u)^4}.$$

Øvelse 108: Reducér følgende brøker ved først at sætte uden for en parentes i tæller og/eller nævner og derefter forkorte:

$$\frac{16x+4}{4x+1},\quad \frac{42-7y}{18-3y},\quad \frac{8z+2}{2z-12},\quad \frac{s-3s^2}{4-12s},\quad \frac{16r+20}{12-8u},$$
$$\frac{9m^2-6mn}{12m+21mn},\quad \frac{21s+3st}{(t+7)4s},\quad \frac{3p^2+5p}{10q+6pq},\quad \frac{4ab-12a^2}{2b^2-6ab}.$$

Øvelse 109: Reducér brøkerne ved bl.a. at anvende C6:

$$\frac{a+1}{a^2-1},\quad \frac{b^2-81}{b^2+9b},\quad \frac{c^2-d^2}{6c+6d},\quad \frac{4x-28}{x^2-49},\quad \frac{9y^2-16z^2}{3y+4z},\quad \frac{(7u-2v)^2}{49u^2-4v^2}.$$

3. Ligninger

En *ligning* udtrykker, at to matematiske størrelser er lige store. I de matematiske størrelser indgår der en *variabel*, dvs. et symbol der står for et vilkårligt tal. En *løsning* til en ligning er en værdi af den variable, for hvilken ligningen er sand. At *løse en ligning* er det samme som at finde samtlige løsninger til ligningen.

Regler:

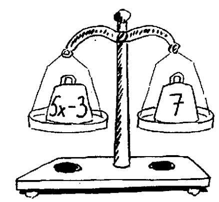
C7 Man må lægge det samme tal til på begge sider af lighedstegnet.

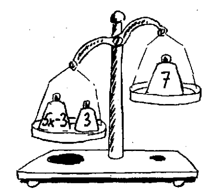
C8 Man må trække det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet.

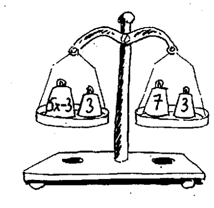
C9 Man må gange med det samme tal på begge sider af lighedstegnet (dog ikke med 0).

C10 Man må dividere med det samme tal på begge sider af lighedstegnet (dog ikke med 0).

Uddybning







Et eksempel på en ligning er $4x-8=0$. I denne ligning er x en *variabel*. En *løsning* til ligningen er $x=2$, fordi denne værdi af variablen gør ligningen sand: $4\cdot 2-8=0$. Ved på denne måde at indsætte et tal på x's plads i ligningen kan du kontrollere, at tallet faktisk er en løsning. I ligningen $4x-8=0$ findes der ikke andre løsninger end $x=2$, så *ligningen er løst*.

Som nævnt er en *variabel* et symbol, der står for et vilkårligt tal. Som symboler bruger man tit små bogstaver som for eksempel x, y, z, a, b eller lignende, fordi det er praktisk, men symbolet kunne lige så godt være »Yrsa«, »□« eller noget helt andet. Nedenfor bruger vi x som den variable i ligningerne.

Du skal bruge reglerne C7–C10, når du skal løse ligninger. At $x=2$ er løsning til ligningen $4x-8=0$ kan let ses direkte, men hvad så med $4x-7=0$ eller $93x+55=0$? Her kan du ikke undvære reglerne. Reglerne udtrykker, at der skal være balance i det, du gør. Det kan være en god ide at tænke på en gammeldags vægt med vægtskå-

le. Du skal hele tiden gøre det samme på begge sider af lighedstegnet, ligesom man må lægge det samme til eller trække det samme fra på de to vægtskåle for at holde balancen. Udtrykket *»flytte over på den anden side af lighedstegnet«* er ikke så heldigt. Det er bedre at sige, at man lægger det samme tal til eller trækker det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet.

Brug af C7, C8 og C10

Eksempel: Se først på, hvordan $4x-8=0$ løses ved hjælp af reglerne. Brug først C7, og læg 8 til på begge sider af lighedstegnet. Det giver $4x=8$. Nu skal du bruge C10 og dividere med 4 på begge sider af lighedstegnet. Dermed når du frem til $x=2$. Disse omformninger kan kort skrives således: $4x-8=0 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$. Denne skrivemåde har du i øvrigt allerede mødt i kapitel 1.

Når man i en ligning laver lovlige omformninger, kan man bruge tegnet $\Leftrightarrow$ mellem de forskellige ligningsudtryk. Man kan også udelade $\Leftrightarrow$. Men for overskuelighedens skyld må man så skrive ligningerne op under hinanden:

$$\begin{aligned} 4x-8&=0\\ 4x&=8\\ x&=2 \end{aligned}$$

På tilsvarende måde kan du ved hjælp af C7 og C10 løse $4x-7=0$:

$$4x-7=0 \Leftrightarrow 4x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}=1{,}75\,.$$

Se nu på $6x+24=0$. For at løse denne ligning skal du først bruge C8 og trække 24 fra på begge sider af lighedstegnet. Det giver $6x=-24$. Så skal du bruge C10 og dividere med 6 på begge sider. Derved får du $x=-4$, og ligningen er løst. Med den korte skrivemåde ser det sådan ud: $6x+24=0 \Leftrightarrow 6x=-24 \Leftrightarrow x=-4$.

På tilsvarende måde kan du ved hjælp af C8 og C10 løse

$93x+55=0$: $\quad 93x+55=0 \Leftrightarrow 93x=-55 \Leftrightarrow x=-\dfrac{55}{93}\approx -0{,}59\,.$

I den sidste ligning er det bedst at angive $x=-\dfrac{55}{93}$ som resultat, fordi det er præcist. $x\approx -0{,}59$ er kun en afrundet værdi (derfor bølgestreger i stedet for almindeligt lighedstegn), som fås ved hjælp af en lommeregner.

På samme måde som ovenfor fås ved brug af C7, C8 og C10:

$$7x=63 \Leftrightarrow x=\frac{63}{7}=9\,,\qquad 9x=72 \Leftrightarrow x=\frac{72}{9}=8\,,$$

$$-8x=40 \Leftrightarrow x=\frac{40}{-8}=-5\,,\qquad 3x=-27 \Leftrightarrow x=\frac{-27}{3}=-9\,,$$

$$-5x=-65 \Leftrightarrow x=\frac{-65}{-5}=13\,,\qquad 7x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{7}\,,$$

$$5x-16=9 \Leftrightarrow 5x=25 \Leftrightarrow x=5\,,$$

$$-4x-57=0 \Leftrightarrow -4x=57 \Leftrightarrow x=\frac{57}{-4}=-14\tfrac{1}{4}\,,$$

$$-2x-23=-7 \Leftrightarrow -2x=16 \Leftrightarrow x=\frac{16}{-2}=-8\,,$$

$$3x+7=25 \Leftrightarrow 3x=18 \Leftrightarrow x=6\,,$$

$$-8x+44=0 \Leftrightarrow -8x=-44 \Leftrightarrow x=\frac{-44}{-8}=5\tfrac{1}{2}\,,$$

$$3x+15=7 \Leftrightarrow 3x=-8 \Leftrightarrow x=\frac{-8}{3}=-2\tfrac{2}{3}\,.$$

Øvelse 110: Løs følgende ligninger, og overvej hvilke regler, du bruger undervejs:

$3x=6$,	$6x=3$,	$5x=-30$,	$7x=5$,
$2x-4=0$,	$-6x-42=0$,	$x+14=19$,	$4x-3=25$,
$8x+13=18$,	$15x-10=0$,	$-3x+8=0$,	$5x-14=9$,
$7x+41=0$,	$17x-32=41$,	$23x+52=40$.	

Brug af C7–C10

Eksempel: Hvordan løses ligningen $\frac{1}{2}x+4=0$? Brug først C8, og træk 4 fra på begge sider af lighedstegnet. Så har du $\frac{1}{2}x=-4$. Brug derefter C9, og gang med 2 på begge sider. Det giver $x=-8$, og ligningen er løst. Udregningerne kan kort skrives således:

$$\tfrac{1}{2}x+4=0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}x=-4 \Leftrightarrow x=-8.$$

I stedet for at bruge C9 og gange med 2 kunne du til sidst have brugt C10 og divideret med $\frac{1}{2}$, men resultatet bliver det samme (se i margen).

$$\tfrac{1}{2}x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{\frac{1}{2}}=-8$$

Se nu på $\frac{3}{8}x-2=0$. Anvendelse af C7 giver $\frac{3}{8}x=2$. Ifølge C9 kan du derefter gange med 8 på begge sider af lighedstegnet og få $3x=16$. Endelig kan du bruge C10 og dividere med 3 på begge sider, så du ender med $x=\dfrac{16}{3}=5\frac{1}{3}$. Kort fås alt i alt:

$$\tfrac{3}{8}x-2=0 \Leftrightarrow \tfrac{3}{8}x=2 \Leftrightarrow 3x=16 \Leftrightarrow x=\frac{16}{3}=5\tfrac{1}{3}\,.$$

Når du er nået til $\frac{3}{8}x=2$, kan du i stedet for ovenstående vælge at bruge C10 og dividere med $\frac{3}{8}$ på begge sider af lighedstegnet, men igen bliver resultatet det samme.

På samme måde som ovenfor fås:

$$\tfrac{1}{3}x=11 \Leftrightarrow x=33\,,$$

$$\tfrac{3}{4}x=2 \Leftrightarrow 3x=8 \Leftrightarrow x=\tfrac{8}{3}=2\tfrac{2}{3}\,,$$

$$-\tfrac{7}{8}x=3 \Leftrightarrow 7x=-24 \Leftrightarrow x=\tfrac{-24}{7}=-3\tfrac{3}{7}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}x+4=0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}x=-4 \Leftrightarrow x=-8\,,$$

$$\tfrac{1}{3}x-38=0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}x=38 \Leftrightarrow x=114\,,$$

$$\tfrac{2}{3}x+9=32 \Leftrightarrow \tfrac{2}{3}x=23 \Leftrightarrow 2x=69 \Leftrightarrow x=\tfrac{69}{2}=34\tfrac{1}{2}\,,$$

$$\tfrac{7}{8}x-52=4 \Leftrightarrow \tfrac{7}{8}x=56 \Leftrightarrow 7x=448 \Leftrightarrow x=\tfrac{448}{7}=64\,,$$

$$-\tfrac{3}{4}x+28=-6 \Leftrightarrow -\tfrac{3}{4}x=-34 \Leftrightarrow 3x=-34\cdot(-4)=136$$

$$\Leftrightarrow x=\tfrac{136}{3}=45\tfrac{1}{3}\,.$$

Øvelse 111: Løs følgende ligninger, og overvej hvilke regler, du bruger undervejs:

$\frac{1}{2}x = 7$, $\quad \frac{1}{4}x = 6$, $\quad \frac{3}{4}x = -9$, $\quad \frac{1}{2}x+8 = 0$,
$\frac{1}{3}x-24 = 0$, $\quad \frac{1}{8}x+19 = 27$, $\quad \frac{1}{8}x+19 = 17$, $\quad \frac{3}{8}x-4 = 0$,
$\frac{2}{3}x-14 = 19$, $\quad \frac{7}{8}x+3 = -4$, $\quad \frac{3}{4}x-34 = 20$, $\quad -\frac{5}{8}x+18 = 10$,
$-\frac{1}{3}x-30 = 27$.

Den ubekendte står i nævneren

Eksempel: I det foregående eksempel og i øvelse 111 kan et udtryk som $\frac{1}{3}x$ også læses som $\frac{x}{3}$, og dvs. at ligningen $\frac{1}{3}x = 11$ også kan læses $\frac{x}{3} = 11$. Du ved nu fra eksemplet, hvordan man løser denne ligning, men hvad nu hvis ligningen hedder $\frac{3}{x} = 11$? x er et tal, så ifølge C9 kan du gange med x på begge sider af lighedstegnet. Så får du $3 = 11x$, og ifølge C10 kan du så dividere med 11 på begge sider, så du ender med $x = \frac{3}{11}$. Udregningerne kan kort skrives således:

$$x \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x}{x} = 3$$

$$\frac{3}{x} = 11 \;\Leftrightarrow\; 3 = 11x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{11}.$$

På tilsvarende måde får man:

$$-\frac{4}{x} = 7 \;\Leftrightarrow\; -4 = 7x \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{4}{7},$$
$$\frac{5}{2x} = 6 \;\Leftrightarrow\; 5 = 12x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5}{12},$$
$$\frac{16}{7x} = -4 \;\Leftrightarrow\; 16 = -28x \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{16}{28} = -\frac{4}{7},$$
$$\frac{8}{x} = \frac{7}{5} \;\Leftrightarrow\; 8 = x \cdot \frac{7}{5} \;\Leftrightarrow\; 8 = \frac{7x}{5} \;\Leftrightarrow\; 40 = 7x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{40}{7},$$
$$-\frac{3}{4} = \frac{1}{x} \;\Leftrightarrow\; -\frac{3x}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; -3x = 4 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{4}{3},$$
$$-\frac{3}{7x} = \frac{1}{9} \;\Leftrightarrow\; -3 = \frac{7x}{9} \;\Leftrightarrow\; -27 = 7x \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{27}{7},$$
$$-\frac{7}{4x} = -\frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{7}{4x} = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; 7 = \frac{8x}{3} \;\Leftrightarrow\; 21 = 8x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{21}{8}.$$

Bemærk at $\frac{-4}{7} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$

Når du skal løse en ligning som $\frac{8}{x} = \frac{7}{5}$, kan du i stedet vende begge brøker om og så løse $\frac{x}{8} = \frac{5}{7}$

Øvelse 112: Løs følgende ligninger:

$\frac{9}{x} = 2$, $\quad -\frac{5}{x} = 8$, $\quad -7 = \frac{1}{x}$, $\quad 3 = \frac{27}{x}$, $\quad \frac{6}{3x} = 4$, $\quad \frac{14}{5x} = -2$,
$-\frac{6}{8x} = 1$, $\quad \frac{2}{x} = \frac{4}{9}$, $\quad \frac{3}{x} = -\frac{6}{7}$, $\quad -\frac{11}{x} = \frac{13}{3}$, $\quad \frac{15}{7} = \frac{2}{x}$, $\quad \frac{5}{2x} = \frac{7}{9}$,
$-\frac{8}{3x} = \frac{1}{4}$, $\quad -\frac{7}{2} = \frac{3}{7x}$, $\quad \frac{1}{6x} = \frac{7}{12}$, $\quad -\frac{3}{4x} = -\frac{11}{4}$.

Brøk med flerleddet størrelse i tælleren

Eksempel:

$$\frac{x+4}{3} = 6 \;\Leftrightarrow\; x+4 = 18 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 14},$$
$$\frac{3x-7}{2} = 23 \;\Leftrightarrow\; 3x-7 = 46 \;\Leftrightarrow\; 3x = 53 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{53}{3}},$$
$$-5 = \frac{1-x}{7} \;\Leftrightarrow\; -35 = 1-x \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 36},$$
$$\frac{10-3x}{-15} = 6 \;\Leftrightarrow\; 10-3x = -90 \;\Leftrightarrow\; 100 = 3x \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{100}{3}},$$
$$\frac{2+x}{9} = 6x \;\Leftrightarrow\; 2+x = 54x \;\Leftrightarrow\; 2 = 53x \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{2}{53}},$$
$$-8x = \frac{11-5x}{3} \;\Leftrightarrow\; -24x = 11-5x \;\Leftrightarrow\; -19x = 11 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = -\frac{11}{19}},$$
$$\frac{1+x}{8} = 2x-4 \;\Leftrightarrow\; 1+x = 8(2x-4) \;\Leftrightarrow\; 1+x = 16x-32$$
$$\Leftrightarrow\; 33 = 15x \;\Leftrightarrow\; \underline{x = \frac{33}{15}},$$
$$\frac{5x-6}{3} = x+14 \;\Leftrightarrow\; 5x-6 = 3(x+14) \;\Leftrightarrow\; 5x-6 = 3x+42$$
$$\Leftrightarrow\; 2x = 48 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 24},$$
$$-4x-7 = \frac{6x+9}{6} \;\Leftrightarrow\; -24x-42 = 6x+9 \;\Leftrightarrow\; -30x = 51$$
$$\Leftrightarrow\; \underline{x = -\frac{51}{30} = -\frac{17}{10}},$$
$$13-3x = \frac{11-9x}{-4} \;\Leftrightarrow\; -4(13-3x) = 11-9x$$
$$\Leftrightarrow\; -52+12x = 11-9x \;\Leftrightarrow\; 21x = 63 \;\Leftrightarrow\; \underline{x = 3}.$$

Øvelse 113: Løs følgende ligninger:

$\frac{x+8}{2} = 7$, $\quad \frac{5x-3}{6} = 7$, $\quad \frac{6-2x}{9} = -4$,
$8 = \frac{3x+22}{4}$, $\quad -7 = \frac{3-x}{-8}$, $\quad \frac{4x+5}{3} = 7x$,
$\frac{9x-24}{5} = -3x$, $\quad 10x = \frac{1-4x}{2}$, $\quad \frac{4x+2}{6} = x-7$,
$\frac{12-5x}{2} = 12x+7$, $\quad 10-2x = \frac{3x+7}{4}$, $\quad -8x-13 = \frac{x-23}{2}$,
$\frac{-14x-3}{7} = 5-3x$, $\quad 9-x = \frac{4x-47}{-5}$, $\quad \frac{8x+8}{-7} = 4x-12$.

Husk at gange i alle led, når du ganger med det samme tal på begge sider af lighedstegnet

Eksempel:

$$\frac{x-4}{7}-3=2x \iff x-4-21=14x \iff -25=13x \iff x=-\frac{25}{13},$$

$$8+\frac{5x+2}{4}=16 \iff 32+5x+2=64 \iff 5x=30 \iff x=6,$$

$$\frac{7-2x}{6}+3x=-8 \iff 7-2x+18x=-48 \iff 16x=-55$$

$$\iff x=-\frac{55}{16},$$

$$x-\frac{2x-3}{5}=-6 \iff 5x-2x+3=-30 \iff 3x=-33 \iff x=-11.$$

Øvelse 114: Løs følgende ligninger:

$\frac{x+2}{6}-7=x,\quad \frac{x-1}{3}+2=4,\quad 9+\frac{6-3x}{4}=-10,$

$\frac{8+5x}{2}+7x=-5,\quad 2-\frac{4x-6}{5}=9,\quad 9x+\frac{-4x-7}{8}=2,$

$2x-\frac{9-x}{4}=0.$

Brøk med flerleddet størrelse i nævneren

Eksempel:

$$\frac{2}{x-2}=8 \iff 2=8(x-2) \iff 2=8x-16 \iff 18=8x$$

$$\iff x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4},$$

$$\frac{1}{2x+7}=-4 \iff 1=-4(2x+7) \iff 1=-8x-28 \iff 29=-8x$$

$$\iff x=-\frac{29}{8},$$

$$\frac{-9}{5-8x}=-6 \iff -9=-6(5-8x) \iff -9=-30+48x$$

$$\iff 21=48x \iff x=\frac{21}{48}=\frac{7}{16},$$

$$14=\frac{-8}{5+x} \iff 14(5+x)=-8 \iff 70+14x=-8 \iff 14x=-78$$

$$\iff x=-\frac{78}{14}=-\frac{39}{7},$$

$$\frac{x}{x+1}=7 \iff x=7(x+1) \iff x=7x+7 \iff -6x=7$$

$$\iff x=-\frac{7}{6},$$

$$\frac{4x}{7-3x}=9 \iff 4x=9(7-3x) \iff 4x=63-27x \iff 31x=63$$

$$\iff x=\frac{63}{31},$$

$$\frac{8x}{3x-4}=2 \iff 8x=2(3x-4) \iff 8x=6x-8 \iff 2x=-8$$

$$\iff x=-4,$$

$$-7=\frac{-2x}{8x-5} \iff -7(8x-5)=-2x \iff -56x+35=-2x$$

$$\iff 35=54x \iff x=\frac{35}{54}.$$

Øvelse 115: Løs følgende ligninger:

$\frac{1}{x+1}=3,\quad \frac{5}{3x-2}=4,\quad \frac{6}{9-2x}=-5,\quad 18=\frac{-7}{4+x},$

$-3=\frac{57}{-6x-7},\quad \frac{-28}{3x+9}=-6,\quad \frac{x}{2x-3}=4,\quad \frac{5x}{4-x}=-3,$

$5=\frac{14x}{-x-7},\quad -9=\frac{-8x}{x+6},\quad \frac{26x}{10-18x}=2.$

Brøk med flerleddet størrelse i både tæller og nævner

Eksempel:

$$\frac{3x-7}{x+1}=5 \iff 3x-7=5(x+1) \iff 3x-7=5x+5 \iff -12=2x$$

$$\iff x=-6,$$

$$\frac{12-5x}{7x-8}=-3 \iff 12-5x=-3(7x-8) \iff 12-5x=-21x+24$$

$$\iff 16x=12 \iff x=\frac{12}{16}=\frac{3}{4},$$

$$11=\frac{4+x}{9x-7} \iff 11(9x-7)=4+x \iff 99x-77=4+x \iff 98x=81$$

$$\iff x=\frac{81}{98},$$

$$4-\frac{9-x}{6x+2}=-1 \iff 4(6x+2)-(9-x)=-(6x+2)$$

$$\iff 24x+8-9+x=-6x-2 \iff 31x=-1$$

$$\iff x=-\frac{1}{31},$$

$$2=\frac{-4x-6}{3x+1}+4 \iff 2(3x+1)=-4x-6+4(3x+1)$$

$$\iff 6x+2=-4x-6+12x+4$$

$$\iff 4=2x \iff x=2.$$

Øvelse 116: Løs følgende ligninger:

$\frac{5x+4}{7x-4}=1$, $\frac{9-x}{6x+3}=-7$, $13=\frac{7+2x}{-4-5x}$, $-3=\frac{x-23}{31+3x}$,
$3+\frac{5x-8}{1+2x}=4$, $1-\frac{16-10x}{8x-11}=2$, $8=\frac{-3x-7}{5x+5}-12$, $-3=6-\frac{6x+3}{19-2x}$.

$3x+2 = 0$
En førstegradsligning
$5x^2+x+7 = 0$
En andengradsligning

Ligningerne i dette kapitel er alle af den type, som man kalder førstegradsligninger. Ved en *førstegradsligning* forstås en ligning, der kan omskrives til formen $ax+b=0$, hvor a og b er tal (og a er ikke 0), og x er en variabel. Der findes andre typer, fx *andengradsligninger,* men det vil vi ikke komme ind på her.

Check dine ligninger

Øvelse 117: Løs følgende ligninger:

$9x=18$, $5x=20$, $12x=6$, $7x=-28$,
$-3x=24$, $8x=5$, $2x=-7$, $6x-12=0$,
$2x+6=0$, $5x-4=21$, $6x+11=14$, $9x-12=15$,
$-4x+7=-9$, $7x-12=26$, $56x+41=0$, $19x-40=31$.

Øvelse 118: Løs følgende ligninger:

$\frac{1}{2}x=9$, $\frac{1}{4}x=-8$, $\frac{2}{3}x=-5$, $\frac{1}{2}x+20=0$,
$\frac{1}{8}x-4=0$, $\frac{1}{4}x+3=18$, $\frac{1}{8}x-13=-17$, $\frac{3}{8}x+6=0$,
$\frac{2}{3}x-34=-56$, $-\frac{7}{8}x-3=-4$, $\frac{3}{4}x+14=20$, $\frac{5}{8}x+30=0$,
$-\frac{1}{3}x-34=-27$.

Øvelse 119: Løs følgende ligninger:

$\frac{2}{x}=3$, $-\frac{7}{x}=4$, $9=\frac{-3}{x}$, $-12=\frac{36}{x}$, $\frac{8}{5x}=4$,
$\frac{28}{6x}=-7$, $-\frac{1}{9x}=4$, $\frac{5}{x}=\frac{6}{7}$, $\frac{4}{x}=-\frac{8}{3}$, $-\frac{17}{x}=\frac{3}{2}$,
$\frac{8}{4}=\frac{18}{x}$, $\frac{5}{6}=-\frac{7}{x}$, $\frac{4}{3x}=\frac{6}{9}$, $-\frac{14}{5x}=\frac{2}{3}$, $\frac{6}{5}=\frac{14}{6x}$,
$-\frac{3}{4}=-\frac{9}{x}$, $\frac{1}{8x}=\frac{3}{8}$, $-\frac{13}{3x}=\frac{20}{6}$.

Øvelse 120: Løs følgende ligninger:

$\frac{x+5}{3}=8$, $\frac{4x-1}{7}=3$, $\frac{10-2x}{8}=-5$,
$-2=\frac{7x+18}{11}$, $6=\frac{9-x}{-7}$, $\frac{5x-7}{4}=12$,
$\frac{2x+3}{9}=5x$, $x=\frac{64-x}{15}$, $-12x=\frac{20+3x}{2}$,
$\frac{7x+2}{5}=2x-8$, $\frac{10-4x}{3}=-x-7$, $4x+8=\frac{14+3x}{3}$,
$8-7x=\frac{2x+9}{-4}$.

Øvelse 121: Løs følgende ligninger:

$\frac{x+7}{4}-3=5$, $\frac{3x-7}{2}+8=4x$, $12+\frac{8-4x}{3}=16$, $9x+\frac{6+7x}{6}=-7$,
$7-\frac{x-16}{7}=4$, $8x+\frac{8-6x}{-3}=2$, $7x-\frac{2x+3}{4}=-6$, $11-\frac{14-3x}{6}=0$.

Øvelse 122: Løs følgende ligninger:

$\frac{2}{x+4}=7$, $\frac{8}{4x-12}=1$, $\frac{7}{5-3x}=-6$, $34=\frac{-22}{3+x}$, $-4=\frac{8}{-3x-5}$,
$\frac{6x}{2x+3}=5$, $\frac{x}{7-3x}=-8$, $19=\frac{-6x}{x-5}$, $4=\frac{-20x}{-4x-3}$.