INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI

SKRIFTLIG EKSAMEN

DISKRET MATEMATIK

Fredag den 2. juni 1995 kl. 9–13

Opgavesættet indeholder 6 opgaver. Opgaverne tillægges lige stor vægt.
Hvert spørgsmål kan besvares uafhængigt af de øvrige.
Alle hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1

En følge (c_n) er givet ved

$$(n+2)c_{n+1} = (4n+2)c_n \quad \text{for } n = 0, 1, \cdots, \quad c_0 = 1.$$

Vis, at der for $n = 1, 2, \cdots$ gælder

$$c_n \geq \frac{4^{n-1}}{n^2}.$$

OPGAVE 2

På en transmissionslinie er sandsynligheden for fejl på hvert enkelt bit 10^{-6}. Der sendes i pakker på 64 bit.

(a) Lad p_0 og p_1 betegne sandsynligheden for 0 fejl, hhv. præcis 1 fejl i en pakke på 64 bit. Find p_0 og p_1.

(b) En fejlkorrektion gør det muligt at opdage og korrigere, hvis der er præcis 1 fejl i en pakke. Find sandsynlighederne for, at en sending på 1000 pakker modtages korrekt, både når der sendes uden fejlkorrektion, og når der sendes med fejlkorrektion. (Hvis din lommeregner ikke giver cifre nok, kan du udtrykke resultatet ved p_0 og p_1.)

(c) Find det forventede antal korrekt modtagne pakker ved en transmission af 10^6 pakker, såvel med som uden fejlkorrektion.

OPGAVE 3

(a) Lad $f(n) = \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, \cdots$, og vis, at

$$(\Delta f)(n) = -\frac{1}{n(n+1)} \quad \text{for } n = 1, 2, \cdots$$

hvor Δ betegner differensoperatoren.

(b) Løs differensligningen

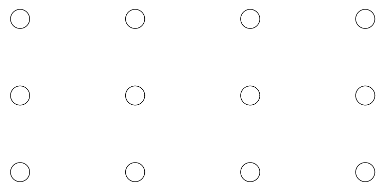
$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n + \frac{1}{n}, \quad x_1 = 1.$$

(c) Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 3n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

OPGAVE 4

Betragt konstruktionen af "chips", som kan opnås ved at forbinde punkterne på Figur 1. Hvert punkt kan forbindes med sine vandrette og lodrette naboer.



Figur 1:

Der er altså 17 mulige forbindelser og 2^{17} "designs", dvs. måder at lave forbindelserne på. Mange af disse kan opnås ved at rotere eller spejle andre, og opgaven går ud på at bestemme antallet af "egentlig forskellige" designs.

(a) To designs opfattes som identiske, hvis det ene fremkommer ved en rotation i planen på 180° af det andet. (Man kan altså ikke vende bunden i vejret på chip'en.) Hvor mange forskellige designs kan der laves?

(b) Nu kan vi også vende bunden i vejret på chip'en. Det betyder, at 2 designs opfattes som identiske, hvis det ene fremkommer af det andet enten ved en rotation på 180° i planen eller ved en spejling om den vandrette eller den lodrette midterlinie. Hvor mange forskellige designs er der nu?

OPGAVE 5

Hvor mange positive hele tal mindre end én million er ikke delelige med hverken 2, 3 eller 5?

Vink: Lad $S = \{1, 2, \cdots, 1000000\}$, $A_1 = S \cap 2\mathbb{Z}$, $A_2 = S \cap 3\mathbb{Z}$, $A_3 = S \cap 5\mathbb{Z}$. Gør rede for, at det søgte tal er $1000000 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$, og brug princippet om inklusion/eksklusion.

OPGAVE 6

I en virksomhed er de ansatte struktureret som en partielt ordnet mængde, hvor $(x \leq y \;\&\; x \neq y)$ betyder, at y kan give ordrer til x. Denne struktur afspejles i lønnen på den måde, at ingen kan give ordrer til en anden ansat på samme eller højere løntrin, end de selv er. Der er 15 løntrin.
På en firmaskovtur med deltagelse af 230 ansatte vil arrangørerne gerne udvælge 16 af deltagerne til en konkurrence, som går ud på at vælte modstanderne i vandet.

(a) Gør rede for, at der kan udvælges 16 deltagere på en sådan måde, at relationen $x \leq y$ ikke er opfyldt for noget par af konkurrencedeltagere, dvs. således at ingen deltager kan give ordre til en anden.

(b) 5 af deltagerne i skovturen nægter at være med i legen. Giv et eksempel, hvor det ikke er muligt at vælge 16 deltagere som i (a) ud af de øvrige 225.