

Skriftlig Eksamen

DM527 Matematiske redskaber i datalogi

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet – Odense

Torsdag, den 1. november 2007 kl. 9-11.

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.), samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 5 opgaver på 5 nummererede sider (1–5).

Fuld besvarelse er besvarelse af alle 5 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i point. Med mindre andet eksplicit er angivet, må man gerne referere til resultater fra lærebogen. Dette gælder også de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne. Specielt må man, med mindre andet eksplicit er angivet, gerne begrunde en påstand ved at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt!). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

Husk at begrunde alle dine påstande!

Opgave 1 (10 %)

For hvert af følgende udsagn skal du afgøre om det er sandt eller falsk. Husk at begrunde dine svar.

a) For vilkårlige mængder A , B og C gælder

hvis $A \subseteq B$, da vil $A - C \subseteq B - C$.

b) For vilkårlige mængder A , B og C gælder

hvis $A - C \subseteq B - C$, da vil $A \subseteq B$.

Opgave 2 (25 %)

Betragt følgende matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vis, at for alle ikke-negative hele tal, $n \geq 0$, da er

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Opgave 3 (16 %)

Betragt følgende binære relation på \mathbb{Z} :

$$R = \{(a, b) \mid ab = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^2.$$

Afgør for hver af følgende egenskaber, hvorvidt R har denne. Husk at begrunde dine svar.

- a) Er R refleksiv?
- b) Er R symmetrisk?
- c) Er R anti-symmetrisk?
- d) Er R transitiv?
- e) Er R en ækvivalensrelation?
- f) Er R en partiel ordning?

Opgave 4 (15 %)

I det følgende kan det være godt at vide, at

$$135 \cdot 203 - 52 \cdot 527 = 1$$

a) Find mængden af heltal x som opfylder kongruensen

$$203x \equiv 3 \pmod{527}$$

b) Find det mindste positive heltal $x > 0$ som opfylder kongruenssystemet

$$x \equiv 1 \pmod{203}$$

$$x \equiv 3 \pmod{527}$$

Opgave 5 (14 %)

En binær relation R på en mængde A siges at være Euklidisk, såfremt

$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge aRc \Rightarrow bRc.$$

Bemærk: Dette er kun *næsten* det samme som transitiv!

Vis, at hvis en relation R er både Euklidisk og reflektiv, da er R også symmetrisk og transitiv.