Skriftlig Eksamen
Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 30. oktober 2009 kl. 9–12

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Bemærk:
I dette eksamenssæt bruges notationen
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Opgave 1 (10%)

Betragt de to matricer $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Beregn $A + B$

b) Beregn $A \cdot B$

Opgave 2 (5%)

Udregn følgende dobbelt-sum

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i + j)$$

Opgave 3 (10%)

a) Beregn største fælles divisor og mindste fælles multiplum for tallene 6 og 15. Dvs. beregn

$$\gcd(6, 15) \text{ og } \operatorname{lcm}(6, 15)\,.$$

b) Er følgende udsagn sandt?

$$\forall a, b \in \mathbb{N}\colon \big(\gcd(a, b) = 1 \,\vee\, \operatorname{lcm}(a, b) < a \cdot b\big)$$

Opgave 4 (15%)

Angiv det mindste positive heltal, som opfylder følgende kongruens-system:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 1 \pmod 4 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \end{aligned}$$

Opgave 5 (15%)

Betragt følgende binære relation på $\mathbb{N}$:

$$R = \{(a, b) \mid a \cdot b \leq a + b\}$$

a) Angiv samtlige elementer i R.

b) Er R symmetrisk?

c) Hvad er kardinaliteten af R?

Opgave 6 (15%)

Bevis vha. induktion, at følgende udsagn er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \;=\; \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2\,.$$