

Skriftlig Eksamen

Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 27. oktober 2011 kl. 9–12

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lomme-regner er tilladt.

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 3 nummererede sider (1–3). De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt. Den skriftlige eksamen tæller 70% af den samlede karakter.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (10%)

Betragt de to mængder

$$S_1 = (A - C) \cup (B \cap C) \text{ og}$$

$$S_2 = (A \cup C) - (\overline{B} \cap C)$$

Afgør, om $S_1 = S_2$.

Opgave 2 (10%)

Lad $a, b \in \mathbb{Z}$.

Bevis, at hvis produktet $a \cdot b$ er lige, da er mindst ét af tallene a og b lige.

Opgave 3 (10%)

a) Vis, at

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

b) Beregn

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^i j$$

Opgave 4 (10%)

Denne opgave handler om følgende kongruens-system:

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{6}$$

- a) Kan den Kinesiske Restklasse-Sætning bruges til at løse kongruens-systemet?
- b) Angiv den mindste positive løsning til kongruens-systemet.

Opgave 5 (10%)

Denne opgave handler om RSA.

Antag, at den offentlige nøgle er $(33, 3)$.

- a) Antag, at bogstaverne i den hemmelige besked er repræsenteret ved deres plads i alfabetet; d.v.s. a svarer til 0, b svarer til 1 o.s.v..
Vi skal kryptere den meget korte besked, som blot består af bogstavet e.
Angiv den krypterede besked.
- b) Angiv den private nøgle.
(Normalt kan man selvfølgelig ikke uden videre beregne den private nøgle ud fra den offentlige nøgle, men det kan man i dette tilfælde, da tallene er meget små.)

Opgave 6 (20%)

Lad $R = \{(a, b) \mid b = a + 1\}$ være en relation på mængden $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- a) Angiv samtlige elementer i R .
- b) Angiv den symmetriske lukning af R .
- c) Er R en partiel ordning?

Lad nu $S = \{(a, b) \mid b = a + 1\}$ være en relation på de positive heltal \mathbb{N}^+ .

- d) Hvad er kardinaliteten af S ?
- e) Bemærk, at den transitive lukning af S er $T = \{(a, b) \mid a < b\}$.
Hvad er kardinaliteten af T ?