Skriftlig Eksamen
Matematiske Redskaber (DM527/MM524)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Tirsdag den 26. oktober 2010 kl. 9-12

English:
You are allowed to use any textbook and any notes you have for this course, along with a pocket calculator.

The exam consists of 6 problems on 7 numbered pages (1–7). The weight assigned to each problem in grading is given in parentheses at the start of each problem. Note that the individual questions of a problem don't have necessarily the same weight. The written exam accounts for 70% of the final grade.

You may refer to results from the textbook by Rosen or problems which have been assigned during the course. References to other books than the textbook will not be accepted.

Remember to argue for your answers!

Dansk:
Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, osv.) samt brug af lommeregner er tilladt.

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 7 nummererede sider (1–7). De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt. Den skriftlig eksamen tæller 70% af den endelige karakter.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen af Rosen inklusive øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Problem 1 (15%)

English:
Let $a \neq 2$ be an arbitrary real number, and let the matrix A be defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Compute A^2.

b) Prove that

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n - 2^n}{a-2} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

is true for every positive integer n.

Dansk:
Lad $a \neq 2$ være et vilkårligt reelt tal, og lad matricen A være defineret ved:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Beregn A^2.

b) Bevis at

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{a^n - 2^n}{a-2} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

er sandt for alle positive heltal n.

Problem 2 (5%)

English:
Let $\mathbb{R}$ be the real numbers. Decide whether the function

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

is a bijection from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

Dansk:
Lad $\mathbb{R}$ være de reele tal. Afgør hvorvidt funkionen

$$f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

er en bijektiv funktion fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

Problem 3 (5%)

English:
Let A and B be finite sets. Prove or disprove: If $|A| \leq |B|$, then $A \subseteq B$.

Dansk:
Lad A og B være endelige mængder. Bevis eller modbevis: Hvis $|A| \leq |B|$, så er $A \subseteq B$.

Problem 4 (10%)

English:
Find

$$11^{514} \mathbf{\ mod\ } 7$$

using the method that employs the binary expansion of the exponent (cmp. page 226 in the course book).

Dansk:
Find

$$11^{514} \mathbf{\ mod\ } 7$$

ved at bruge metoden med binær ekspansion af eksponenten (se side 226 i lærebogen).

Problem 5 (20%)

English:

Let R be the relation on the set $\{a, b, c, d\}$ containing the ordered pairs $\{(a, a)$, (a, b), (b, c), (c, d), $(d, c)\}$.

a) Is R reflexive?

b) Is R irreflexive?

c) Is R symmetric?

d) Is R asymmetric?

e) Is R antisymmetric?

f) Is R transitive?

g) Draw the directed graph for R^1, R^2, R^3, R^4 and for the transitive closure $t(R)$.

h) Is $t(R)$ an equivalence relation?

Dansk:

Lad R være relationen på mængden $\{a, b, c, d\}$ indeholdede de ordnede par $\{(a, a)$, (a, b), (b, c), (c, d), $(d, c)\}$.

a) Er R refleksiv?

b) Er R irrefleksiv?

c) Er R symmetrisk?

d) Er R asymmetrisk?

e) Er R antisymmetrisk?

f) Er R transitiv?

g) Tegn den orienterede graf for R^1, R^2, R^3, R^4 og for den transitive lukning $t(R)$.

h) Er $t(R)$ en ækvivalensrelation?

Problem 6 (15%)

English:
Find all the integer solutions to the following system of congruences:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 50 \pmod{101} \end{aligned}$$

Dansk:
Find alle heltallige løsninger til det følgende ligningssystem.

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 50 \pmod{101} \end{aligned}$$