Løsningsforslag til Skriftlig Eksamen DM527 Matematiske redskaber i datalogi

Torsdag, den 1. november 2007.

Opgave 1 (10 %)

a) Sandt. Dette vises ved et modstridsbevis.

   Antag at $A - C \not\subseteq B - C$, men at $A \subseteq B$. Dette giver, at der må findes et x med $x \in A - C$ og $x \notin B - C$.

   Per definition giver $x \in A - C$, at $x \in A$ og $x \notin C$. Da $A \subseteq B$ og $x \in A$, vil $x \in B$. $x \in B$ og $x \notin C$ giver at $x \in B - C$ i modstrid med hvad vi antog før.

b) Falsk. Lad $A = C = \{1\}$, $B = \{2\}$. Med disse mængder har vi $A - C = \emptyset$ og $B - C = \{1\}$, men ikke $A \subseteq B$.

Opgave 2 (25 %)

Dette vises ved et induktionsbevis.

Basis: $n = 0$. Vi har per definition $A^0 = I_2$ og dermed som ønsket

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^0 \\ 0 & 2^0 \end{bmatrix} .$$

Induktionshypotese: Antag at for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} .$$

Induktionsskridt: Vi viser, at sætningen holder for $n + 1$ givet induktionshypotesen for n.

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1+2(1-2^n) \\ 0 & 2\cdot 2^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1-2^{n+1} \\ 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Opgave 3 (15 %)

a) R er ikke refleksiv. Modeksempel $(1,1) \notin R$, idet $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

b) R er symmetrisk. Antag aRb, dvs. $ab = 0$. Da multiplikation i $\mathbb{Z}$ er kommutativ, vil $ba = 0$ og dermed bRa.

c) R er ikke anti-symmetrisk. Modeksempel: $0R1$ og $1R0$, men $0 \neq 1$.

d) R er ikke transitiv. Modeksempel: $1R0$ og $0R2$, men vi har ikke $(1,2) \in R$.

e) R er ikke en ækvivalensrelation. Dette kræver at R er refleksiv, symmetrisk og transitiv. R er kun symmetrisk.

f) R er ikke en partiel ordning. Dette kræver at R er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv. R er ingen af delene.

Opgave 4 (15 %)

a) Vi multiplicerer begge sider med 135 og får

$$135 \cdot 203\,x \equiv (1 + 52 \cdot 527)x \equiv x \equiv 135 \cdot 3 \equiv 405 \pmod{527}$$

Dermed bliver løsningsmængden $\{405 + 527i | i \in \mathbb{Z}\}$.

b)
   (a) Fra vinket får vi at $\gcd(203, 527) = 1$, dvs. vi kan benytte den kinesiske restklassesætning.

   (b) Vi har $a_1 = 1, a_2 = 3, m_1 = 203, m_2 = 527, m = m_1 m_2 = 106981$. Dermed $M_1 = \frac{m}{m_1} = m_2 = 527$ og $M_2 = \frac{m}{m_2} = m_1 = 203$.

   (c) Vi skal finde y_1, så $M_1 y_1 \equiv 527 y_1 \equiv 1 \pmod{203}$. Fra vinket fås $y_1 = -52$. Vi skal finde y_2, så $M_2 y_2 \equiv 203 y_1 \equiv 1 \pmod{527}$. Fra vinket fås $y_2 = 135$.

(d) Dermed bliver løsningerne på formen

$$x \equiv \sum_{i=1}^{2} a_i M_i y_i \equiv 1 \cdot 527 \cdot (-52) + 3 \cdot 203 \cdot 135 \equiv 54811 \pmod{m}$$

Den mindste positive løsning er $x = 54811$.

Opgave 5 (15 %)

Lad R være en vilkårlig Euklidisk og refleksiv binær relation på en mængde A.

$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge aRc \Rightarrow bRc\,. \tag{1}$$

Symmetrisk. Sæt $c = a$ i (1), derved fås

$$\forall a, b \in A : aRb \wedge aRa \Rightarrow bRa\,.$$

Da R er refleksiv har vi $\forall a \in A : aRa$, dvs. ovenstående kan forkortes til flg. hvorved R er symmetrisk.

$$\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa\,.$$

Transitiv. Da R er symmetrisk fås at aRb er sand hviss bRa. Dermed kan (1) skrives som

$$\forall a, b, c \in A : bRa \wedge aRc \Rightarrow bRc\,,$$

hvorved R er transitiv.