Skriftlig Reeksamen
Diskrete Metoder til Datalogi (DM535)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 13. juni 2013 kl. 10–13

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 4 nummererede sider (1–4).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (15%)

a) Betragt de to mængder

$$S_1 = (A \cap B \cap C) \cup (B - (A \cup C))$$
$$S_2 = (B - A) \cup (B \cap C)$$

Afgør, om $S_1 = S_2$.

b) Er følgende udsagn sandt?

Hvis A og B er tælleligt uendelige mængder, da er $A \cap B$ også tælleligt uendelig.

Opgave 2 (10%)

Betragt funktionerne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x - 1$$

a) Angiv $f \cdot g$

b) Angiv $g \circ f$

a) Angiv $f \circ f$

Opgave 3 (15%)

Angiv samtlige positive løsninger til nedenstående kongruenssystem.

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 4$$
$$x \equiv 4 \pmod 5$$

Opgave 4 (25%)

a) Betragt matricerne $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Beregn $A + B$.

b) For ethvert $i \in \mathbb{N}$, lad $A_i = \begin{bmatrix} i & i+1 \\ i+2 & i+3 \end{bmatrix}$.

Vis, at alle tal i matricen $A_i + A_{i+1}$ er positive ulige tal, for alle $i \in \mathbb{N}$.

c) Hvilke af de seks nedenstående udsagn er ækvivalente med udsagnet, som skulle bevises i spørgsmål b?

1. $\forall i \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2i+1 & 2i+1 \\ 2i+1 & 2i+1 \end{bmatrix}$
2. $\exists i \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2i+1 & 2i+1 \\ 2i+1 & 2i+1 \end{bmatrix}$
3. $\forall i \in \mathbb{N}\colon \exists j \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2j+1 & 2j+1 \\ 2j+1 & 2j+1 \end{bmatrix}$
4. $\exists j \in \mathbb{N}\colon \forall i \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2j+1 & 2j+1 \\ 2j+1 & 2j+1 \end{bmatrix}$
5. $\forall i \in \mathbb{N}\colon \exists a, b, c, d \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2a+1 & 2b+1 \\ 2c+1 & 2d+1 \end{bmatrix}$
6. $\exists a, b, c, d \in \mathbb{N}\colon \forall i \in \mathbb{N}\colon A_i + A_{i+1} = \begin{bmatrix} 2a+1 & 2b+1 \\ 2c+1 & 2d+1 \end{bmatrix}$

Opgave 5 (10%)

Beregn følgende dobbeltsum.

$$\sum_{i=6}^{10} \sum_{j=1}^{i} j$$

Opgave 6 (25%)

Denne opgave handler om binære relationer.

I kurset har vi set, hvordan relationer kan repræsenteres v.h.a. opremsning, mængde-bygger-notation, orienterede grafer eller matricer.
For matricerne gælder (som sædvanligt), at elementerne opskrives i stigende orden; d.v.s. elementet $(1, 2)$ repræsenteres f.eks. af et 1-tal i første række, anden søjle.

Spørgsmål a og b handler om binære relationer på mængden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Hvilke af relationerne i Figur 1 er ækvivalensrelationer?

b) Hvilke af relationerne i Figur 1 er partielle ordninger?

c) Betragt nu følgende ækvivalensrelation på $\mathbb{Z}$.

$$R = \{(a, b) \mid a + b \equiv 0 \pmod 2\}$$

Angiv alle elementer i ækvivalensklassen for 3, d.v.s. $[3]_R$.

$\{(a,b) \mid b{-}a = 2\}.$

(a) Relationen R_a

$\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$

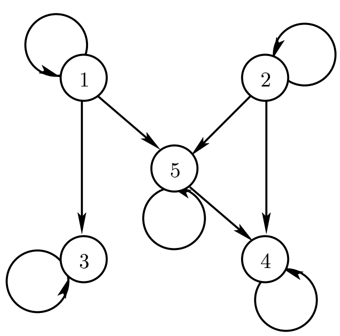
(b) Relationen R_b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

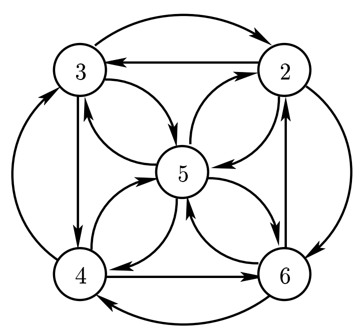
(c) Relationen R_c

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Relationen R_d



(e) Relationen R_e



(f) Relationen R_f

Figur 1: Relationer til Opgave 6 a og b