

# Skriftlig Reeksamen Diskret Matematik (DM547)

Institut for Matematik og Datalogi  
Syddansk Universitet, Odense

Mandag den 22. februar 2016 kl. 16–19

Eksamenssættet består af 4 opgaver på 2 nummererede sider (1–2).

Fuld besvarelse er besvarelse af alle 4 opgaver.

De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebøgerne og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

**Husk at begrunde dine svar!**

## Opgave 1 (40%)

Betragt følgende tre mængder.

$$A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2|n\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3|n\}$$

$$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 6|n\}$$

Husk, at  $a|b$  betyder, at  $a$  går op i  $b$ .

Betragt desuden følgende mængder

$$B_1 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$B_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{6} \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_4 = \{4 + 2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_5 = A_1 \cap A_2$$

$$B_6 = A_2 \cup A_3$$

$$B_7 = A_2 - A_1$$

$$B_8 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 0 \pmod{3}\}$$

$$B_9 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 3 \pmod{6}\}$$

$$B_{10} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \gcd(n, 3) = 3\}$$

Husk, at  $\gcd(a, b)$  betyder største fælles divisor (greatest common divisor) af  $a$  og  $b$ .

- a) Angiv for hver af mængderne  $B_1, B_2, \dots, B_{10}$ , om mængden er lig med  $A_1, A_2, A_3$  eller ingen af delene.

## Opgave 2 (10%)

Betragt funktionen  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  defineret ved  $f(x) = 4x^2 - 2$ .

- Angiv den inverse til  $f$ ; d.v.s. angiv  $f^{-1}$ .
- Angiv den sammensatte funktion  $f \circ f$ .

## Opgave 3 (15%)

Lad  $S_n = \sum_{i=0}^n (i+1) \cdot 2^i$ , for  $i \in \mathbb{N}$

- Beregn  $S_0$ ,  $S_1$  og  $S_2$ .
- Vis v.h.a. induktion, at  $S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1$ , for  $n \geq 1$ .

## Opgave 4 (35%)

Betragt følgende relation på mængden  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2)\}$$

- Tegn en orienteret graf (directed graph), som repræsenterer  $R$ .
- Er  $R$  en ækvivalensrelation?
- Angiv  $R^2$  og  $R^3$ .
- Lad  $S$  være en symmetrisk relation. Vis, at  $S^2$  også er symmetrisk.