Skriftlig Eksamen
Diskret Matematik (DM547)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–13

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen og øvelsesopgaverne. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (20%)

Betragt funktionerne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = x^3 - 3$$
$$g(x) = x^3 - x$$

a) Angiv den inverse til f; d.v.s. angiv f^{-1}.

b) Har g en invers?

c) Angiv produktet af f og g, d.v.s. funktionen $f \cdot g$.

d) Angiv den sammensatte funktion $f \circ g$.

Opgave 2 (10%)

Lad $x, y, z \in \mathbb{R}$. Bevis, at

$$x + y > z \;\Rightarrow\; x > \frac{z}{2} \vee y > \frac{z}{2}$$

Opgave 3 (15%)

Betragt rækken $\{a_n\}$ defineret ved

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{hvis } n = 0 \\ 2 \cdot a_{n-1} + 1, & \text{hvis } n \geq 1 \end{cases}$$

a) Beregn a_0, a_1 og a_2

b) Bevis v.h.a. induktion, at $a_n = 2^n - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4 (20%)

Betragt mængden $A = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Hvilke af nedenstående mængder er lig med A?

$S_1 = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$

$S_2 = \{2, 3, 5, 9, \ldots\}$

$S_3 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$S_4 = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$

$S_5 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \colon n = 2k+1\}$

$S_6 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists! k \in \mathbb{Z} \colon n = 2k+1\}$

$S_7 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \forall k \in \mathbb{Z} \colon n \neq 2k\}$

$S_8 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \colon 2n+1 = k\}$

Opgave 5 (25%)

Betragt følgende relation på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$R = \{(a, b) \mid a \cdot b \leq 10\}$$

a) Hvilke af følgende par tilhører R?

$$(1, 1), (1, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (5, 3)$$

b) Er R refleksiv?

c) Er R symmetrisk?

d) Er R antisymmetrisk?

e) Er R transitiv?

f) Er R en ækvivalensrelation?

Opgave 6 (10%)

Denne opgave handler om at kryptere v.h.a. RSA.
Antag, at den offentlige nøgle er $(n, e) = (3569, 5)$.

Krypter beskeden "lade".
Antag, at bogstaverne i beskeden er repræsenteret ved deres plads i alfabetet, skrevet med to cifre; d.v.s. a svarer til 00, b svarer til 01, o.s.v..
For at undgå tal, der er større end n, skal du gruppere bogstaverne i blokke med to bogstaver i hver, ligesom i Eksempel 8 i afsnit 4.6.