

Skriftlig Eksamen Diskret Matematik (DM547)

Fredag den 16. januar 2015 kl. 10–13

Løsningsforslag

Opgave 1

a) $y = x^3 - 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y + 3}$

D.v.s. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

b) Nej, g er **ikke** invertibel, da den ikke er injektiv.

Eks: $g(0) = 0 = g(1)$.

c) $(f \cdot g)(x) = (x^3 - 3)(x^3 - x) = x^6 - x^4 - 3x^3 + 3x$

d)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - 3 \\ &= (x^6 - 2x^4 + x^2)(x^3 - x) - 3 \\ &= x^9 - 2x^7 + x^5 - x^7 + 2x^5 - x^3 - 3 \\ &= x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3 - 3\end{aligned}$$

Opgave 2

Kontraposition: $x \leq \frac{z}{2} \wedge y \leq \frac{z}{2} \Rightarrow x + y \leq \frac{z}{2} + \frac{z}{2} = z$

Opgave 3

a) $a_0 = 0$
 $a_1 = 2a_0 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$
 $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) **Basis:** $n = 0$
 $a_0 = 0 = 2^0 - 1$

Induktionsantagelse: $n \geq 1$

$$a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$$

Induktionsskridt: $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot a_{n-1} + 1, && \text{ifølge def.} \\ &= 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1, && \text{ifølge ind.ant.} \\ &= 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Opgave 4

$A = S_4 = S_5 = S_6 = S_7$ (ulige heltal)

S_1 : 2-potenser

$S_2 = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

S_3 : ulige **positive** tal

$S_8 = \mathbb{Z}$

Opgave 5

- a) $(1, 1), (1, 4), (2, 5), (4, 1)$
- b) **Nej.** Eks: $(5, 5) \notin R$.
- c) **Ja.** $ab \leq 10 \Leftrightarrow ba \leq 10$.
- d) **Nej.** Eks: $(1, 2), (2, 1) \in R$.
- e) **Nej.** Eks: $(5, 2), (2, 5) \in R$, men $(5, 5) \notin R$.
- f) **Nej.** Symmetrisk, men hverken reflektiv eller transitiv.

Opgave 6

lade \rightarrow 11000304

$$1100^5 \bmod 3569 = 2991$$

$$304^5 \bmod 3569 = 2006.$$

D.v.s. den krypterede besked er 2991 2006.

Check: $d = 689$

$$2991^{689} \bmod 3569 = 1100$$

$$2006^{689} \bmod 3569 = 304$$