

Afsnit 1.4 : Kvantorer

Fra sidst:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x$$

Annotations:
- "universet/domænet" points to $\mathbb{Z}$
- "For alle" / "For enhver" points to $\forall$
- "gælder" (udeledes nogle gange) points to $:$

F (eks: $x=2$)

indsænkning
af universet

$$\begin{aligned} & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 3 : x+3 \leq 2x & S \\ & \Downarrow \forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : x+3 \leq 2x \\ & \Downarrow \forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x) \end{aligned}$$

$$P(x): x+3 \leq 2x$$

Der findes mindst et positivt heltal, som opfylder P

D.v.s.

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \dots$$

D.v.s.

$$\exists x \in \mathbb{Z}^+ : x+3 \leq 2x$$

Annotations:
- "der eksisterer" points to $\exists$
- "sådan at" points to $:$

S } også fra sidst

$$\Downarrow \exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x$$

S (universet er udvidet)

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 : x+3 \leq 2x$$

F ($x \leq 1 \Rightarrow x+1 > 2x$)

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S \quad (x=0)$$

Dette udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S$$

↑
„Der eksisterer præcis ét“

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad F \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad F \quad (x=3, x=4)$$

$\exists$ og $\forall$ er kvantorer

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftarrow \oplus$$

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \begin{array}{l} \swarrow (\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3) \vee x \geq 4 \\ \searrow \forall x \in \mathbb{N} : (x \leq 3 \vee x \geq 4) \end{array}$$

Negering af kvantificerede udsagn:

Hvad er det modsatte af $\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} \Downarrow & \quad \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^f) & S \\ & \quad \exists x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & S \end{aligned}$$

Hvad er det modsatte af $\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} \Downarrow & \quad \neg(\overbrace{\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^S) & F \\ & \quad \forall x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & F \end{aligned}$$

De Morgans Love for kvantorer:

$$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

Flere eksempler:

$$\begin{aligned} \text{De Morgan for kvantorer} \Downarrow & \quad \neg(\exists x \in \mathbb{N} : 2^x < x) \\ & \quad \forall x \in \mathbb{N} : 2^x \geq x & S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De Morgan for kvantorer} \Downarrow & \quad \neg(\forall x \in \mathbb{N} : (x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x)) \\ \text{De Morgan for kvantorer} \Downarrow & \quad \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x) \\ & \quad \exists x \in \mathbb{N} : (x+3 > 2x \wedge 2^x \geq 2x) & S \text{ (eks: } x=1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{De Morgan for quantifiers} & \Updownarrow & \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)}^S) \\
\text{Table 7} & \Updownarrow & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x) \\
\text{De Morgan} & \Updownarrow & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x < 3 \vee x+3 \leq 2x) \\
& & \exists x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \wedge x+3 > 2x) \quad F
\end{array}$$

Indløjrede kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

$$P(x,y) : x+y = 0$$

$P(2,3)$ er falsk

$P(2,-2)$ er sand

Q: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Er sandt, hvis følgende er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x+y = 0$$

S (sæt $y = -x$)

Kan skrives mere præcist:

R: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Har kvantorenes orden betydning?

S: $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ F

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x+y = 0$$

$$y = 5?$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 5+x = 0$$

$$y = 100?$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 100+x = 0$$

Ja!

S er stærkere end Q :

$$S \Rightarrow Q$$

$$Q \not\Rightarrow S$$

$|$ Q kan man vælge et nyt y for hvert x

$|$ S skal der være et y , der „virker“ for alle x .

R er også stærkere Q

Eks:

S : Mgd. af stud. i dette lokale

H : Mgd. af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$$\forall x \in S: \exists y \in H: P(x,y)$$

$$\exists y \in H: \forall x \in S: P(x,y)$$

Der findes en hobby, som alle studerende i dette lokale har.

Flere eksempler:

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x > y \quad F \quad (\text{eks: } y = x)$$

$$\forall y \in \mathbb{Z}: \exists x \in \mathbb{Z}: x > y \quad S \quad (\text{eks: } x = y + 1)$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x > y \quad S \quad (\text{eks: } x = 0)$$

Eks (negering):

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \neg(\forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$$

Eks (ens kvantorer):

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \quad S \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \end{aligned}$$

"Sår op i"

Når kvantorerne er ens, må man gerne ændre rækkefølgen.
Her skal udsagnet f.eks. gælde for alle per $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

$$S \quad \text{Eks: } x=1, y=1$$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

(Læs Tabel 1, s. 56)

Eks (tre kvantorer):

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

$$S \quad \text{Eks: } y=x$$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z$$