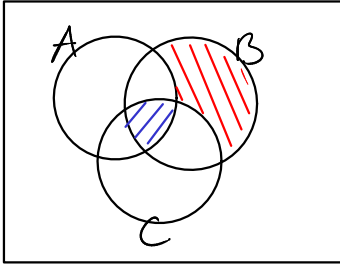


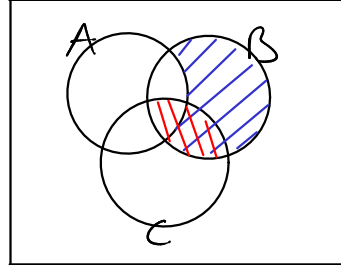
Opgave 1:



: $A \cap B \cap C$

: $B - (A \cup C)$

 og : S_1



: $B - A$

: $B \cap C$

 og : S_2

D.v.s. $S_1 \neq S_2$

Opgave 2:

a) f er ikke injektiv, da f.eks. $f(0) = f(1)$
(f er heller ikke surjektiv, da $\text{Vm}(f) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R}$.)
Dermed er f ikke en bijektion.

b) Da f ikke er bijektiv, har den ikke en invers

$$\begin{aligned} \text{c) } (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^2 + x + 1 + 2x - 2 \\ &= x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + x + 1) \\ &= 2(x^2 + x + 1) - 2 \\ &= 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

Opgave 3:

Stærke induktion:

Basis: $n=1$ og $n=2$

$$a_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}$$

$$a_2 = 2 = 2^1 = 2^{2-1}$$

Ind. ant.:

$$a_{n-2} = 2^{n-3} \quad \text{og}$$

$$a_{n-1} = 2^{n-2}$$

Ind. skridt: $n \geq 3$

$$a_n = a_{n-1} + 2 a_{n-2}$$

$$= 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3},$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-2}$$

$$= 2^{n-1}.$$

ifølge induktionsantagelsen

Opgave 4:

Skal vise, at

$$m \cdot n \text{ ulige} \Rightarrow m \text{ ulige} \wedge n \text{ ulige}$$

Bruger kontraposition, d.v.s. viser, at

$$m \text{ lige} \vee n \text{ lige} \Rightarrow m \cdot n \text{ lige}$$

m lige

$$\Downarrow m = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow m \cdot n = 2kn, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow m \cdot n \text{ lige, da } k \cdot n \in \mathbb{Z}$$

Tilsvarende for n lige.

(kun DMS49:)

Opgave 5:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{x=1}^n (6x^2 + 2x + 1) &= 6 \left(\sum_{x=1}^n x^2 \right) + 2 \left(\sum_{x=1}^n x \right) + n \\ &= 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} + n, \text{ iflg. Tabel 2} \\ &\quad \text{(2. og 3. række)} \\ &= (n^2 + n)(2n+1) + (n^2 + n) + n \\ &= (2n^3 + 3n^2 + n) + n^2 + 2n \\ &= 2n^3 + 4n^2 + 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 2^j &= \sum_{i=0}^n (2^{i+1} - 1), \text{ iflg. Tabel 2 (1. række)} \\ &= 2 \left(\sum_{i=0}^n 2^i \right) - \sum_{i=0}^n 1 \\ &= 2 \cdot (2^{n+1} - 1) - (n+1), \text{ iflg. Tabel 2} \\ &\quad \text{(1. række)} \\ &= (2^{n+2} - 2) - (n+1) \\ &= 2^{n+2} - (n+3) \end{aligned}$$

Opagave 6:

a) Bemærk, at $\frac{n}{n+2\sqrt{n}+1} \geq \frac{n}{4} = \frac{1}{4}$, for $n \geq 1$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{4} > 0.$$

Dermed div konvergerer rækken ifølge Adams Sætning 4.

b) Ifølge Adams Eksempel 9.3.1 divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Det betyder ifølge Sammenlignings-kriteriet (Adams Sætning 9(b), med $K \geq 10$), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div konvergerer.

c) Brugte Røtrent-kriteriet (Adams Sætning 11):

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} &= \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{x \cdot \cancel{x^n}}{\cancel{x^n}} \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cancel{n!}} \\ &= \frac{x}{n+1} \end{aligned}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0$, konvergerer rækken.

Også OK blot at henvise til Adams Eks. 9.5.2(a).