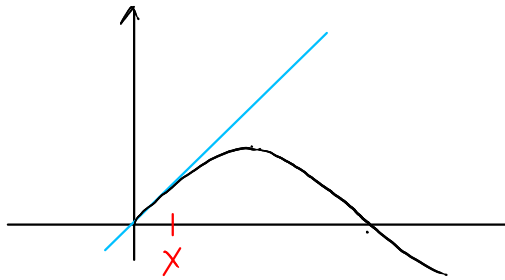


Hvordan beregner man $\sin(x)$?

$\sin$ er en transcendent funktion. D.v.s. $\sin(x)$ kan ikke beregnes via et endeligt antal $+$, $-$, $\cdot$, $\sqrt{\quad}$ - operationer. Men vi kender f.eks. $\sin(0)$.



$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x = x$$

Dårlig approx., hvis x er stor.

Lidt bedre approx.:

$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{\sin''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin'''(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x - \frac{\sin(0)}{2} \cdot x^2 - \frac{\cos(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$0 + x - 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

Helt præcist:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \leftarrow \text{Taylor-række}$$

Taylor-rækker er potensrækker

Mange funktioner kan skrives som potensrækker, evt. bare i et begrænset interval.

Vi har allerede set nogle eksempler. F.eks.:

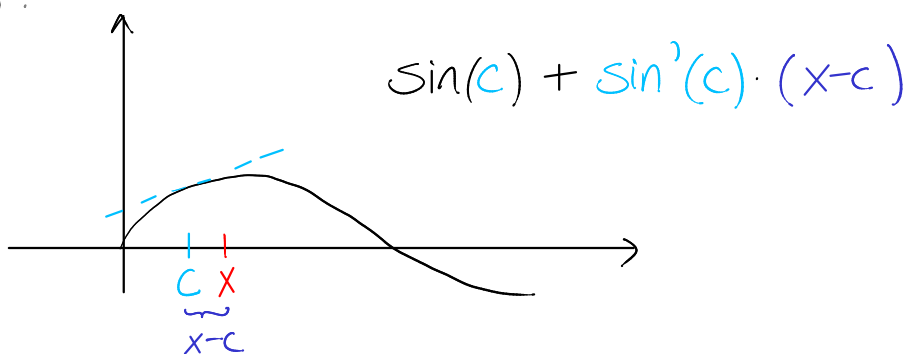
For $-1 < x < 1$ gælder

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Man kunne selvfølgelig tage udgangspunkt i et andet punkt end $x=0$:



$$\sin(x) = c + \sin'(c) \cdot (x-c) + \frac{1}{2} \sin''(c) \cdot (x-c)^2 + \dots$$

Potensrækker (Adams afsnit 9.5)

Def. 9.5.7:

En række på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kaldes en potensrække omkring c.

Ex:

$1+x+x^2+\dots$ er en potensrække omkring 0.
Rækken konverger mod $\frac{1}{1-x}$, for $x \in (-1, 1)$.
0 er midtpunktet i dette interval. Det er ikke tilfældigt:

Sætning 17:

For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gælder et af følgende tre udsagn:

- (i) Rækken konverger kun for $x=c$. ($R=0$)
(For $x=c$, er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0$)
- (ii) Rækken konverger for ethvert $x \in \mathbb{R}$. ($R=\infty$)
- (iii) Der findes et $R \in \mathbb{R}$, så rækken
 - konverger, hvis $|x-c| < R$
 - diverger, hvis $|x-c| > R$.

R kaldes rækkens konvergensradius, og
 c kaldes rækkens konvergens-centrum.

Eks:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ har konvergensradius 1

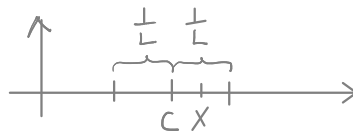
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ har konvergensradius ∞ .

Bemerk:

Ifølge Kootied-kriteriet konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, hvis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)}{a_n} \right| \\ &= \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)}_L |x-c| < 1. \end{aligned}$$

O.v.s. hvis $|x-c| < \frac{1}{L}$



O.v.s. hvis grænseværdien $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ eksisterer, da er

$$R = \frac{1}{L}$$

($L=0 \Rightarrow R=\infty$ og $L=\infty \Rightarrow R=0$)

Eks 2a): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$C=0$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

D.U.S.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D.U.S.

$$R = \infty$$

D.U.S.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverger for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

| Eks 9.6.1 får vi at se, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Hvis en potensrække har en positiv konvergensradius, kan den differentieres led for led:

Sætning 19:

Hvis $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, for $-R < x < R$,

da er $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$, for $-R < x < R$

Taylor- og Maclaurin-rækker (afsnit 9.6)

Sætning 21:

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, for $c-R < x < c+R$, hvor $R > 0$,

da er $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, for $n=0,1,2,\dots$

Bevis:

Hvis $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2$, for $c-R < x < c+R$,
følger det af Sætning 19 (med x erstattet af $x-c$), at

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-c) + 3 \cdot 4a_4(x-c)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-c) + \dots$$

$\vdots$

D.v.s.

$$f(c) = a_0 = 0! a_0$$

$$f'(c) = a_1 = 1! a_1$$

$$f''(c) = 2a_2 = 2! a_2$$

$$f'''(c) = 2 \cdot 3a_3 = 3! a_3$$

$\vdots$

□

D.v.s. hvis der findes en potensrække, som repræsenterer $f(x)$ i et åbent interval, da er den entydigt bestemt (der kan ikke være to forskellige potens-rækker, som repræsenterer den samme funktion).

Def. 9.6.8:

Hvis $f^{(k)}(x)$ eksisterer for alle $k = 0, 1, 2, \dots$,

da kaldes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$

Taylor-rækken for f omkring c .

Hvis $c=0$, kaldes rækken også en Maclaurin-række.

NB:

Taylor-rækken for f omkring c er lig med $f(x)$ for $x=c$.

For andre x -værdier konvergerer den ikke nødvendigvis.

Og hvis den konvergerer for andre x -værdier, konvergerer den ikke nødvendigvis mod $f(x)$.

Def. 9.6.9:

Hvis Taylor-rækken for f omkring c konvergerer

mod f i et åbent interval omkring c ,

da er f **analytisk i c** .

Hvis rækken konvergerer mod f i ethvert punkt i

et åbent interval I , da er f **analytisk i I** .

Eks 9.6.1: e^x

$(e^x)' = e^x$, og $e^0 = 1$

D.v.s. Maclaurin-rækken for e^x er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Ifølge Eks 9.5.2(a) konvergerer rækken.

Men konvergerer den mod e^x ? Ja:

Lad $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$.

$P_n(x)$ kaldes Taylor-polynomiet af grad n omkring c .

Hvis vi bruger $P_n(x)$ til at approksimere $f(x)$, er fejlen, vi begår, af samme størrelses-orden som det næste led i Taylor-rækken:

Sætning 22: (Taylors Sætning)

Antag, at $f^{(n+1)}(x)$ eksisterer

Da er $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, hvor

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \quad \text{hvor}$$

ξ ligger mellem x og c

For e^x er fejlen

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{hvor } s \text{ ligger mellem } 0 \text{ og } x.$$

D.v.s.

$$|E_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= e^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{ifølge regnearterne s. 499}$$

$$= e^{|x|} \cdot 0, \quad \text{ifølge Sætning 3(b)}$$

$$= 0$$