

Bevismetoder (opsummering fra sidste uge)

Direkte bevis $\boxed{p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q}$

Kontraposition $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Modstrid $(\neg p \Rightarrow f) \Rightarrow \boxed{p}$

(Ikke-)konstruktive eksistensbeviser

Hvis et udsagn virker svært at bevise,
så prøv at

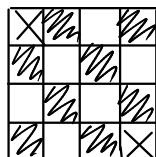
- Splitte beviset op:

Bevis delresultater / specialtilfælde separat

Eks: $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow p$ (to delresultater)
lige og ulige tal (to specialtilfælde)

- se på simple specialtilfælde først for at
opnå forståelse / indsigt.

Eks: Små Skakbrætter:



Gælder generelt, når I

- Løser opgaver, der er svære at få hul på:

Prøv at

- sætte nogle konkrete tal på
- forenkle opgaven, f.eks. ved at se på nemme specialtilfælde.

- Løser i bogen

Hvis I kan fordybe stoffet ved selv at lave nogle eksempler, giver det meget mere end at læse bogens eks.

Lidt terminologi :

Sætning (theorem) : Vigtigt udsagn
(som er bevist at være sandt -
ellers er det bare en påstand (conjecture))

Lemma : Hjelpe-sætning
Bruges til at strukturere et langt bevis.

Korollar : Følge-sætning.
Udsagn, som følger umiddelbart af en sætning.

Nogle gange bruger man også:

Proposition : Mindre vigtigt udsagn

Induktion (Kapitel 5)

Bruges til at bevise parametriserede udsagn.

Eks: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

D.v.s. $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

$P(0): 2^0 = 2^1 - 1$

$P(1): 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1$

$P(2): 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1$

$\vdots$

$n=0: 2^0 = \textcircled{1}$

$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = \textcircled{1} \quad \checkmark$

} Basis tilfælde

$n=1: 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = \textcircled{3}$

$2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = \textcircled{3} \quad \checkmark$

$n=2: 2^0 + 2^1 + 2^2 = 3 + 2^2 = \textcircled{7}$

$2^{2+1} - 1 = 8 - 1 = \textcircled{7} \quad \checkmark$

$n=3: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 7 + 8 = \textcircled{15}$

$2^{3+1} - 1 = 16 - 1 = \textcircled{15} \quad \checkmark$

Kunne også gøre sådan:

$$n=0: \quad \underline{2^0} = 1 = \underline{2^1 - 1} \quad P(0)$$

$$\begin{aligned} n=1: \quad \underline{2^0 + 2^1} &= (2^1 - 1) + 2^1, \text{ iflg. } P(0) \\ &= 2 \cdot 2^1 - 1 \\ &= \underline{2^2 - 1} \quad P(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2: \quad \underline{2^0 + 2^1 + 2^2} &= (2^2 - 1) + 2^2, \text{ iflg. } P(1) \\ &= 2 \cdot 2^2 - 1 \\ &= \underline{2^3 - 1} \quad P(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3: \quad \underline{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3} &= (2^3 - 1) + 2^3, \text{ iflg. } P(2) \\ &= \underline{2^4 - 1} \quad P(3) \end{aligned}$$

Vi har vist:

- $P(0)$
- $P(0) \Rightarrow P(1)$
- $P(1) \Rightarrow P(2)$
- $P(2) \Rightarrow P(3)$

På samme måde kunne vi vise

$$P(3) \Rightarrow P(4)$$

$$P(4) \Rightarrow P(5)$$

⋮

Men vi bliver aldrig færdige...

Vis i stedet

$$P(n-1) \Rightarrow P(n), \text{ for alle } n \geq 1$$

D.v.s. vis, at

Induk-
tions-
antagelse

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \text{ for alle } n \geq 1$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \Rightarrow$$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n$$

$$= 2 \cdot 2^n - 1$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

} Induktionsstredt

Induktionsbevis:

Bevis $P(n)$, $n \geq k$ o.h.a. (Simpel) induktion:

- Bevis $P(k)$ (Basistilfælde)
- Bevis $\underbrace{P(n-1) \Rightarrow P(n)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \geq k+1$ (Induktionsstredt)

(eller bevis $\underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \in I$)

Eks: $2^n < n!$ for $n \geq 4$

Bevis: Ved induktion over n

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse:

$$2^{n-1} < (n-1)!$$

Ind. skridt: $n \geq 5$

$$\Downarrow 2^{n-1} < (n-1)!, \text{ iflg. ind. ant.}$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot (n-1)! < n \cdot (n-1)! = n!$$

$$\Downarrow 2^n < n! \quad \swarrow \text{da } n \geq 4$$

Vi viste

- $P(4)$
- $P(4) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$

Ligesom at vælte domino-brikker:

- I basis-tilfældet viser vi, at den første brik kan væltes.
- I ind. skridtet viser vi, at afstanden ml. brikkerne er så lille, at vælter en brik, vælter den næste også.

$$2^4 = 16 < 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2^5 = 32 < 120 = 5!$$

$$2^6 = 64 < 720 = 6!$$

$\vdots$

Går hele tiden med 2 på venstre siden, og med større og større tal på højresiden

Prøve selv at bevise, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{O.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsantagelse:

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsskridt: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$$\Downarrow$$
$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

□

Eks: En mængde med n elementer har 2^n delmængder.

Basis: Ved induktion over n

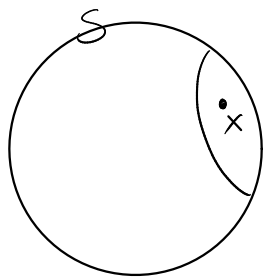
Basis: $n=0$

Den tomme mængde har én delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

Ind. skridt: $n \geq 1$



$$|S| = n$$

x : vilkårligt element i S

$$S' = S - \{x\}, \text{ dvs. } |S'| = n-1.$$

S' har 2^{n-1} delmængder iflg. ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$ (2^{n-1} muligheder iflg. ind. ant.)
- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$ (2^{n-1} muligheder iflg. ind. ant.)

$$\text{I alt } 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n \text{ muligheder}$$

□

$$n=0, \{ \} : \{ \}$$

$$n=1, \{a\} : \{ \}, \{a\}$$

$$n=2, \{a,b\} : \{ \}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$$

⋮

Påstand: Alle æbler har samme farve

Ben's: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.:

1 enhver skål med $n-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $n \geq 3$

Stil æblerne op på række:



De første $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

De sidste $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $n-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle n æbler samme farve. □

Vi har vist

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$