

Afsnit 2.1-2.2:

Mængder (ordnet samling af elementer)

Eks: $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, danske bogstaver

uendelige

endelig mængde

$$V = \{a, e, i, o, u, y\} \quad \text{opremsning (enumeration)}$$

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{uendelig opremsning}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{L} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\} \quad \text{mængde-bygger-notation}$$

↑
"hværom
du gælder"
↑
"går op i"
(Kap. 4)

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}: x = 2k\}$$

$$= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Mængde-bygger-notation: $\{\langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle\}$

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 4\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}^+ \wedge q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$\text{NB: } \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\}$$

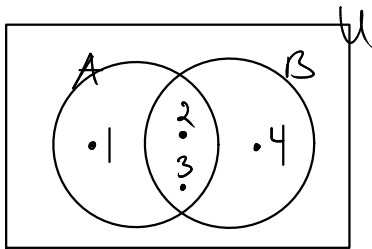
$|S|$: kardinalitet af S („størrelsen“ af S)
elementer i S , hvis S er endelig
Dat + Mat vendt tilbage til kardinalitet af
uendelige mængder

Eks: $|V| = 6$

$$|S| = 100$$

$$|\{1, 2, 3\}| = |\{3, 2, 1\}| = |\{3, 1, 1, 2, 3\}| = 3$$

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $U = \mathbb{N}$

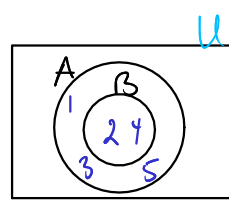


Venn-diagram

Delmængde (subset)

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x \in A: x \in B$$

↑
"er en delmængde af"
"er indeholdt i"



U: universet

Venn-diagram

Eks:

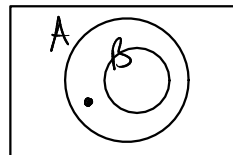
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 4\}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$$

Ägte delmængde:

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A - B \neq \emptyset$$



$$\emptyset = \{\}$$

Den tomme mængde

Øøning 2.1.1.

For enhver mængde S gælder

(i) $\emptyset \subseteq S$

(ii) $S \subseteq S$

Beris:

(i) Skal vise:

$$\forall x: \underbrace{(x \in \emptyset \Rightarrow x \in S)}_{\substack{\text{F} \\ \text{S}}} \quad \checkmark$$

(ii) Skal vise:

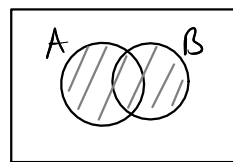
$$\forall x: (x \in S \Rightarrow x \in S) \quad \checkmark$$

□

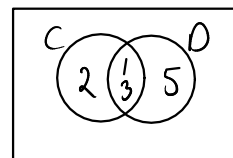
Føreningsmængde (union)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

↑
"føret med"



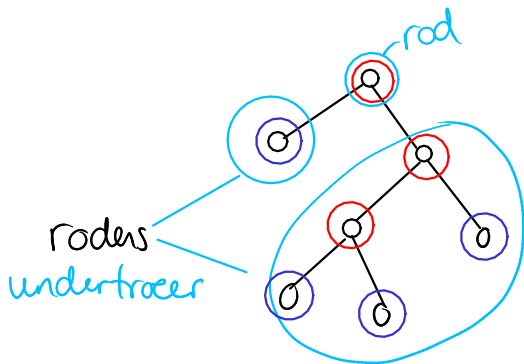
Eks: $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{1, 3, 5\}$
 $C \cup D = \{1, 2, 3, 5\}$



Eks: $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$
men $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}$
 $|\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}| = 2$

Struktural induction (afsnit 5.3)

Eks: Fulde binære træer



o : knude
/ \ : kant

Alle knuder har 0 eller 2 børn

Knuder med 0 børn er blade

Knuder med 2 børn er indre knuder

I sidste uge så vi på rekursive definitioner.
Fulde binære træer kan også defineres rekursivt:

Def. 5.35: Fulde binære træer

Basis-skridt : $S_0 = \{\bullet\}$

Rek. skridt : $S_n = S_{n-1} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \mid T_1, T_2 \in S_{n-1} \right\}, n \geq 1$

D.v.s.

$$S_1 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_2 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_3 = \left\{ \text{---} \mid \text{---} , \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

$(|S_3| = 26)$

Struktural induktion

Basis $P(S_n)$, $n \geq 0$:

- Basis $P(S_0)$
- Basis, at $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n - S_{n-1})$ for alle $n \geq 1$.

I eks. var der 4 blade og 3 indre knuder. Ikke tilfældigt...

Påstand: For ethvert fuldt binært træ T gælder

$$b(T) = i(T) + 1, \text{ hvor}$$

$$b(T) = \# \text{blade i } T$$

$$i(T) = \# \text{indre knuder i } T$$

Basis: Ved struktural induktion

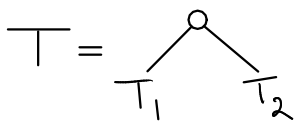
Basis: $S_0 = \{ \bullet \}$

$$i(T) = 0$$

$$b(T) = 1 = i(T) + 1 \quad \checkmark$$

Ind. ant: $b(T) = i(T) + 1$ for alle $T \in S_{n-1}$

Ind. skridt: $S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$



$$T \in S_n - S_{n-1} \Rightarrow T_1, T_2 \in S_{n-1}$$

$\Rightarrow$ roden er en indre knude

D.v.s.

$$i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1 \quad \text{og}$$

$$b(T) = b(T_1) + b(T_2)$$

$$= (i(T_1) + 1) + (i(T_2) + 1), \quad \text{iflg. ind. ant.}$$

$$= (i(T_1) + i(T_2) + 1) + 1$$

$$= i(T) + 1$$

