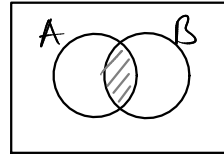


Fællesmængde: (intersection)
(snitmængde)

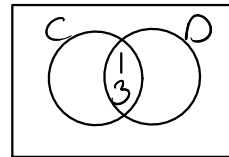
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

↑
"fælles med"
"snit"

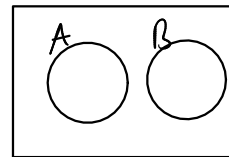


Eks:

$$C = \{1, 2, 3\}, \quad D = \{1, 3, 5\}$$
$$C \cap D = \{1, 3\}$$

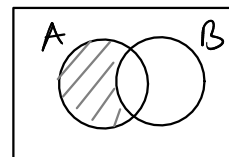


A og B er disjunkte, hvis $A \cap B = \emptyset$
(disjoint)



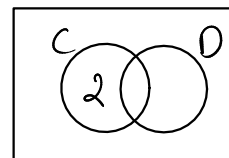
A frærgnet B (difference)

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$
$$A \setminus B$$



Eks:

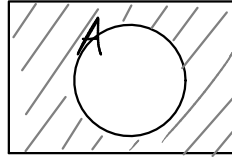
$$C = \{1, 2, 3\}, \quad D = \{1, 3, 5\}$$
$$C - D = \{2\}$$
$$D - C = \{5\}$$



$$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \quad (\text{dvs } A \text{ og } B \text{ er disjunkte})$$

Komplement

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



Eks: $U = \mathbb{N}$, $L = \{0, 2, 4, \dots\}$
 $\bar{L} = \{1, 3, 5, \dots\}$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\bar{C} = \{4, 5\}, \quad \bar{D} = \{2, 4\}$$

Mængde-ligheder

Tabel 2.2.1, s. 132

$\cup$

$\cap$

$\sim$

Tabel 1.3.6 s. 25

$\sim$

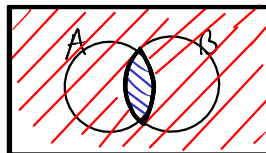
$\vee$

$\sim$

$\wedge$

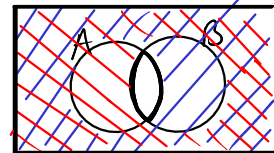
De Morgans Love

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



: $A \cap B$

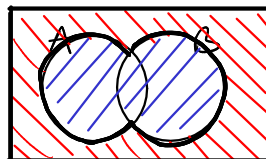
: $\overline{A \cap B}$



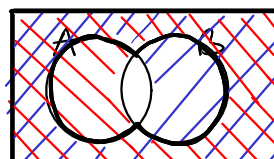
: $\bar{A}$ : $\bar{B}$

,  og : $\bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



: $\overline{A \cup B}$

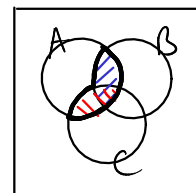
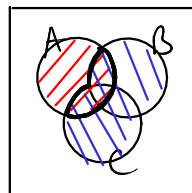


: $\bar{A} \cap \bar{B}$

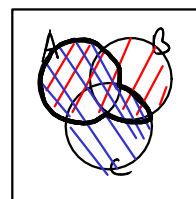
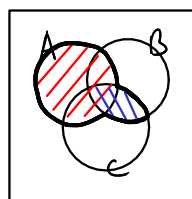
Bogen viser love fra Tabel 22.1 v.h.a. omskrivninger af def. af de enkelte mængde-operationer og v.h.a. tilhørs-tabeller (membership tables), men det er som regel nemmest at bruge Venn-diagrammer (som ovenfor).

Distributive love:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Potensmængde (power set)

$$P(S) = \{ A \mid A \subseteq S \} = 2^S$$

$$|P(S)| = 2^{|S|} \quad (\text{beviste i sidste gang v.h.a. stærk induktion})$$

Eks:

$$S = \{1, 2\}$$

$$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Kartesisk produkt

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Eks: $A = \{1,2\}, \quad B = \{2,3\}$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$$

Lidt notation:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

(ligeegyldigt, hvordan
man sætter parenteser)

Funktioner (afsnit 2.3)

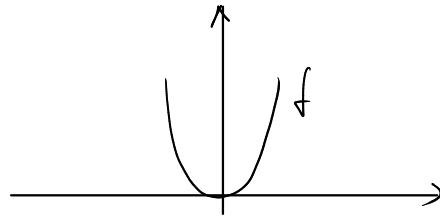
$$f: A \rightarrow B$$

f tildeler præcis ét element fra B til hvert element i A .

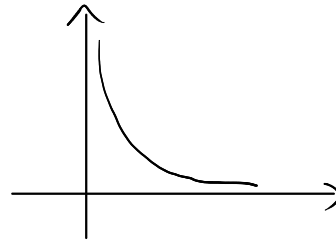
A : definitionsområde ($D_m(f)$) (domain)

B : sekundærområde (codomain)

Eks: $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$



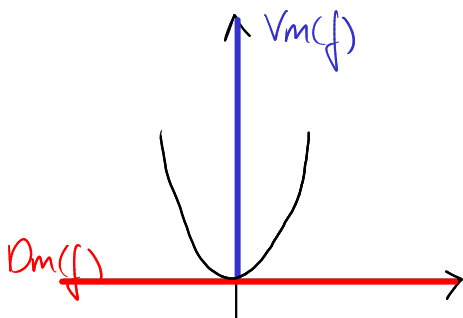
$$g(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ g(x) = \frac{1}{x}$$



Værdiområde / billedområde: (range)

$$\begin{aligned} V_m(f) &= \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \\ &= \underline{f(A)} \end{aligned}$$

Eks:



$$D_m(f) = \mathbb{R}$$

Sekundærområde: $\mathbb{R}$

$$(f(\mathbb{R}) =) V_m(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R} \Rightarrow$$

f er ikke surjektiv

($V_m(f)$ "dækker" ikke hele $\mathbb{R}$)

Def:

- $f: A \rightarrow B$ er surjektiv / på, hvis $V_m(f) = B$

$V_m(f) = B$ er ækvivalent med

$$\forall y \in B: \exists x \in A: y = f(x)$$

D.v.s. for hvert y i skudermængden

findes der et x i def.mængden, som mappes til y .
 f „rammer“ hele skudermængden.

- f er injektiv / en-til-en, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in D_m(f): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

V.h.a. kontraposition kan denne def. omskrives til det ækvivalente udsagn:

$$\forall x_1, x_2 \in D_m(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

D.v.s. der er ikke to forskellige x -værdier med samme funktionsværdi.

D.v.s. f er heller ikke injektiv

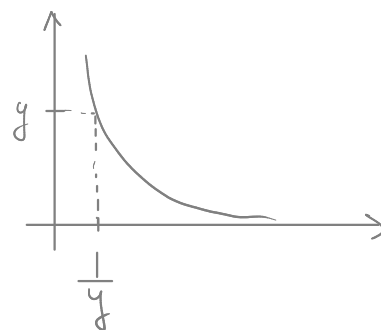
eks: $f(-1) = f(1)$

g er til gengæld både injektiv og surjektiv:

Eks:

- g er injektiv:
for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder
 $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
 $D_m(g)$
- g er surjektiv:
for ethvert $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:
 $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+ = D_m(g)$
sekundærmængde

D.v.s. for ethvert y i sekundærmængden findes der et $x \in D_m(g)$, så $y = g(x)$.

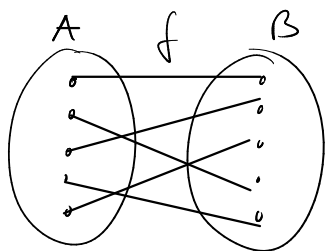


Dermed er g bijektiv

Def:

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv

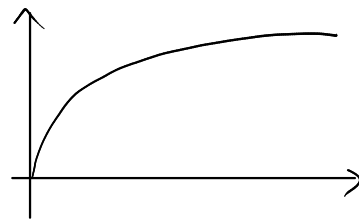


Eks: $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \sqrt{x}$

- h er injektiv:

Før alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$



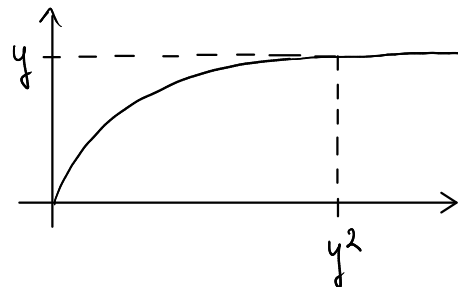
- h er surjektiv:

Før alle $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \quad \text{og}$$

$$y^2 \in \mathbb{R}^+ = \text{Dm}(f)$$

D.v.s. for ethvert y i
sekundærmængden findes der et
 $x \in \text{Dm}(h)$, så $y = h(x)$.

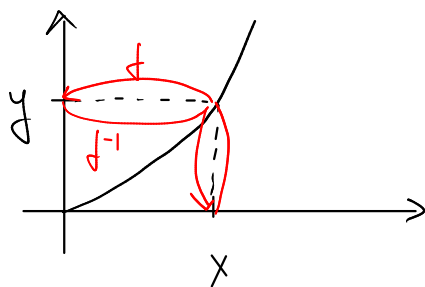


Altså er h en bijektion.

Hvis $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, har den en invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ (f er invertibel).

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$



• f er ikke invertibel

• g er invertibel

$g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, da

$$g^{-1}(h(x)) = g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

• h er invertibel

$h^{-1}(x) = x^2$, da

$$h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$