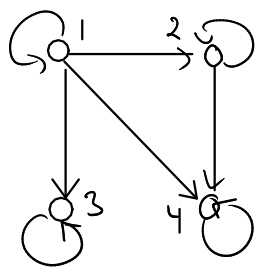


Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

- Opremsning
 - Mængde-byggeset - notation
 - Matricer (Hvis A, B endelige)
 - Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
- (digraphs)
- } har vi allerede set

Orienterede grafer

Eks: | på $\{1, 2, 3, 4\}$



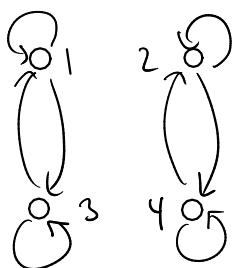
Fire knuder og otte kanter, hvoraf fire er loops.

Refleksiv p.g.a. loops
Transitiv p.g.a. $\rightarrow$

$$a \equiv b \pmod{2} \iff a \bmod 2 = b \bmod 2$$

(a og b har samme paritet)

Eks: $\equiv \pmod{2}$ på $\{1, 2, 3, 4\}$



refleksiv, symmetrisk, transitiv
(dvs. ækv. rel...)

Exs:

$$<^2 = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b-2 \}, \text{ hvis } A = \mathbb{N}$$

$$<^2 = <, \text{ hvis } A = \mathbb{R}$$

$$=^2 = =$$

$$\neq^2 = A \times A$$

$$R = \{ (a,b) \mid b = a^2 \}$$

$$R^2 = \{ (a,b) \mid b = a^4 \}$$

Lukninger (afsnit 9.4)

Lad R være en relation på A

Lad P være en egenskab (f.eks. refleksiv, symmetrisk eller transitiv)

Lukningen af R m.h.t. P er den minimale mængde R' , som opfylder

- $R \subseteq R'$
- R' har egenskaben P

Eks: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 2), (\underline{2}, 2), (2, 3), (\underline{4}, 4)\}$$

Den refleksive lukning af R er:

$$\begin{aligned} R_r &= R \cup \{(\underline{1}, 1), (\underline{3}, 3)\} \\ &= \{(\underline{1}, 1), (1, 2), (\underline{2}, 2), (2, 3), (\underline{3}, 3), (\underline{4}, 4)\} \end{aligned}$$

Refleksive lukning af R :

$$R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Eks:

Refleksive lukning af $<$: $\leq$

$$\text{_____} \cup \text{_____} = \text{_____}$$

$$\text{_____} \cup \text{_____} \neq A \times A$$

$$\text{_____} \cup \text{_____} \mid \mid$$

Symmetriske lukning af R :

$$R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Eks

Symm. lukning af R :

$$R_s = R \cup \{(2,1), (3,2)\}$$

$$= \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (4,4)\}$$

Symm. lukning af $< : \neq$

$$\text{_____} \cup \text{_____} = : =$$

$$\text{_____} \cup \text{_____} \leq : A \times A$$

$$\text{_____} \cup \text{_____} \equiv : \equiv$$

Uddykning af eks:

$<$ er relationen $\{(a,b) \mid a < b\}$

Den symmetriske lukning er ifølge def.:

$$\{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(b,a) \mid a < b\} =$$

$$\{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \mid b < a\} =$$

$$\{(a,b) \mid a < b \vee b < a\} =$$

$$\{(a,b) \mid a \neq b\}$$

Antisymmetrisk lukning findes ikke.

For at gøre en ikke-antisymmetrisk relation antisymmetrisk skal man fjerne elementer.

Eks: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

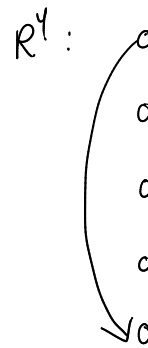
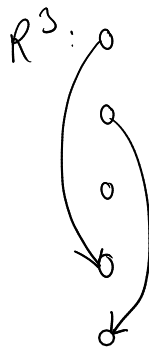
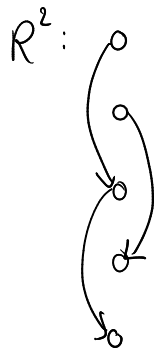
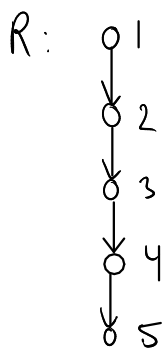
Den transitive lukning af R er

$$\begin{aligned} R_t &= R \cup \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\} \cup \{(1, 4), (2, 5)\} \cup \{(1, 5)\} \\ &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \end{aligned}$$

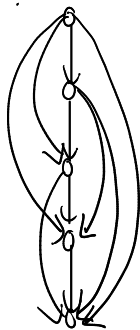
Transitive lukning af R

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \text{ hvis } A \text{ er endelig}$$

Eks igen:



$$R_t = R \cup R^2 \cup R^3:$$



Alle kanter svarer til en sti i grafen for R .

Eks: Transitive lukning af $\leq$: $\leq$

$$\text{---} \mid \text{---} = ; =$$

$$\text{---} \mid \text{---} \neq : A \times A$$

Uddybring af eks:

$\leq$ og $=$ er allerede transitive.

$\neq$ er relationen $R = \{(a,b) \mid a \neq b\}$

$\neq$ er ikke transitiv

eks: $2 \neq 3 \wedge 3 \neq 2$, men $2 = 2$

Lad R_t betegne den transitive lukning af R .

Ifølge def. af en lukning indeholder R_t alle par i mængden $S = \{(a,b) \mid \exists c: a \neq c \wedge c \neq b\}$, som igen indeholder alle par i mængden $L = \{(a,b) \mid a = b\}$

D.v.s. $(R \cup L) \subseteq R_t$.

Da $R \cup L = A \times A$ (L er relationen $=$), gælder altså, at

$R_t = A \times A$