

Funktioner (afsnit 2.3)

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(x) = x^3 - x + 7$$

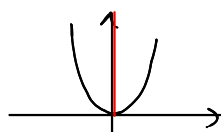
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

En funktion er først fuldt specificeret, når vi har angivet def.mængde og sekundærmængde.

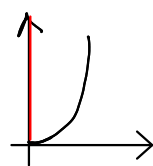
Eks:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$



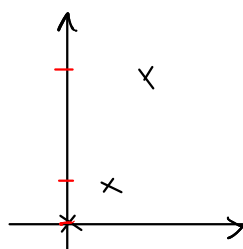
$$V_m(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$$



$$V_m(g) = \mathbb{R}^+$$

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad h(x) = x^2$$



$$V_m(h) = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$$

def.mgd.

sek.mgd.

Def 1+2:

$$f: A \rightarrow B$$

f tildeler præcis ét element fra B til hvert element i A .

A : definitionsmængde ($D_m(f)$) (domain)

B : sekundærmængde (codomain)

Def. 4:

Værdimængde / billedmængde:

(range)

$$\begin{aligned} \text{Vm}(f) &= \{ y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y \} \\ &= f(A) \end{aligned}$$

D.v.s. de y -værdier, funktionen antager.

Eks fra før:

$\text{Vm}(f) \neq \mathbb{R}$. Dermed er f ikke surjektiv:

Def. 7:

$f: A \rightarrow B$ er surjektiv / på, hvis
 $\forall y \in B : \exists x \in A : y = f(x)$

D.v.s. hvis

$$\text{Vm}(f) = B$$

g og h er heller ikke surjektive

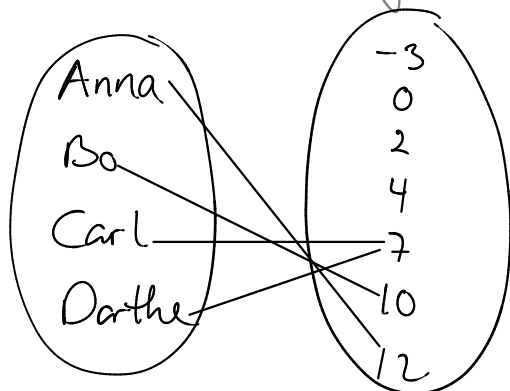
Men denne funktion p :

$$p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad p(x) = x^2$$

og denne:

$$r: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], \quad r(x) = \cos(x)$$

Had med denne funktion:



Hvordan surjektiv
eller injektiv...

Def. 5:

f er injektiv / en-til-en, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

V.h.a. kontraposition kan denne def. omskrives til det ækvivalente udsagn:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

D.v.s. der er ikke to forskellige x -værdier med samme funktionsværdi /

Hver y -værdi "rammes højst én gang".

D.v.s. f er ikke injektiv

eks: $f(-1) = f(1)$

Men g og h er injektive.

Eks:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

f er **injektiv**:

for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

NB: ikke nok at referere til grafen!

Eks:

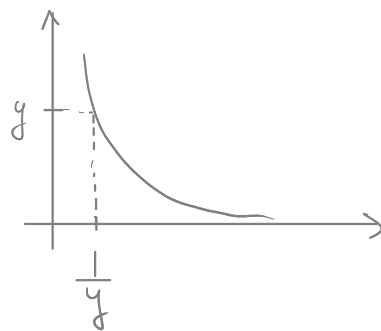


f er **surjektiv**:

for ethvert $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+ = D_m(f)$$

D.v.s. for ethvert y i sekundærmængden findes der et $x \in D_m(f)$, så $y = f(x)$.

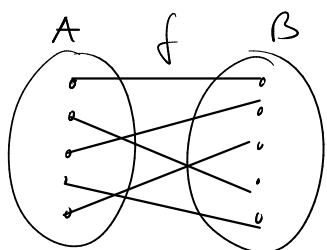


Dermed er f **bijektiv**...

Def. 8:

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv

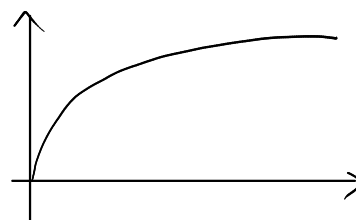


Eks: $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad g(x) = \sqrt{x}$

g er injektiv:

Før alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$



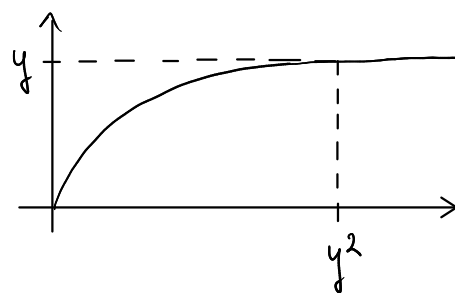
g er surjektiv:

Før alle $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \quad \text{og}$$

$$y^2 \in \mathbb{R}^+ = \text{Dm}(g)$$

D.v.s. for ethvert y i
sekundærmængden findes der et
 $x \in \text{Dm}()$, så $y = g(x)$.



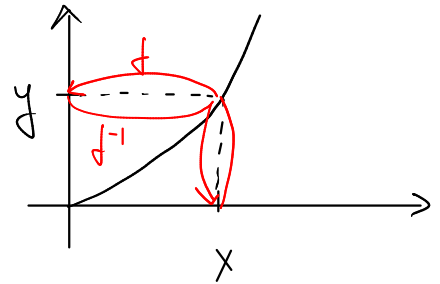
Altså er g en bijektion.

Def. 9:

Hvis $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, har den en
invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ (f er invertibel).

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$



Eks: $f(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1}{x}$

f er invertibel, og

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$

D.v.s.

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

Check:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$$

Eks: $g(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, g(x) = \sqrt{x}$

g er invertibel, og
 $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

D.v.s.

$$g^{-1}(y) = y^2$$

Check:

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2$, er ikke invertibel

$p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2$, er heller ikke invertibel

Man kan kombinere funktioner til nye funktioner:

Def. 3:

Lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Da er $f+g$ og $f \cdot g$ funktioner fra A til $\mathbb{R}$ defineret ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Eks: $f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 1$
 $(f+g)(x) = x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Eks: $(f \cdot g)(x) = x^2(x^2 + 1) = x^4 + x^2$

Def. 10:

Lad $f: B \rightarrow C$ og $g: A \rightarrow B$

Da er $f \circ g$ en funktion fra A til C defineret ved

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{Sammensat funktion}$$

Ex: $(f \circ g)(x) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

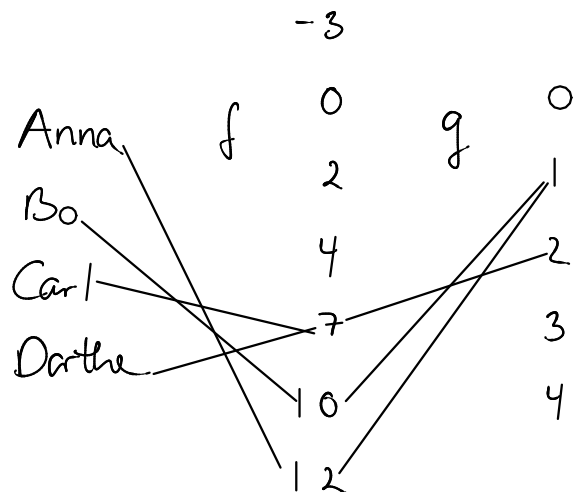
Hvis $A=C$, kan man også gå den anden vej:

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(x^2) = x^4$$

$$f^3(x) = f(f(f(x))) = f(x^4) = x^6$$

$$g^2(x) = g(g(x^2+1)) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$



$$(g \circ f)(x):$$

Hvor mange fik samme karakter som x ?

$$(g \circ f)(\text{Anna}) =$$

$$g(f(\text{Anna})) = g(12) = 1$$

Lidt mere terminologi:

Def. 6:

f er voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f er strengt voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Tilsvarende for (strengt) aftagende

Eks:

Voksende:

$$\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = 5 \\ f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \leftarrow \\ \searrow \end{array} \quad \text{strengt voksende}$$

Aftagende:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x \\ f(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = 5 \end{array} \right\} \quad \text{strengt aftagende}$$

Hvis f er aftagende eller voksende, kaldes den monoton