

Induktion (Kapitel 5)

Bruges til at bevise parametriserede udsagn.

Eks: $\overbrace{\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1}^{P(n)}$, for alle $n \in \mathbb{N}$

D.v.s. $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(0): \quad \begin{aligned} & 2^0 = 2^1 - 1 \\ & 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$P(1): \quad \begin{aligned} & 2^0 + 2^1 = 2^2 - 1 \\ & 1 + 2 = 3 \quad \quad \quad 4 - 1 = 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$P(2): \quad \begin{aligned} & 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1 \\ & 1 + 2 + 4 = 7 \quad \quad \quad 8 - 1 = 7 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$P(3): \quad \begin{aligned} & 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 \\ & 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \quad \quad \quad 16 - 1 = 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

For at checke $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ og $P(3)$ kunne vi også gøre sådan:

$$n=0: 2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad \leftarrow \text{Basis tilfælde}$$

$$\begin{aligned} n=1: 2^0 + 2^1 &= (2^1 - 1) + 2^1, \text{ iflg. } P(0) \\ &= 2 \cdot 2^1 - 1 \\ &= 2^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2: 2^0 + 2^1 + 2^2 &= (2^2 - 1) + 2^2, \text{ iflg. } P(1) \\ &= 2 \cdot 2^2 - 1 \\ &= 2^3 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3: 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 &= (2^3 - 1) + 2^3, \text{ iflg. } P(2) \\ &= 2^4 - 1 \end{aligned}$$

Vi har vist:

- $P(0)$
- $P(0) \Rightarrow P(1)$
- $P(1) \Rightarrow P(2)$
- $P(2) \Rightarrow P(3)$

På samme måde kunne vi vise

$$P(3) \Rightarrow P(4)$$

$$P(4) \Rightarrow P(5)$$

$\vdots$

Men vi bliver aldrig færdige...

Vis i stedet

$$P(n-1) \Rightarrow P(n), \text{ for alle } n \geq 1$$

D.v.s. vis, at

$$\text{Ind. ant.} \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \text{ for alle } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} &= 2^n - 1 \\ 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{i=0}^n 2^i} \right\} \text{Induktionsskridt}$$

□

Induktionsbevis:

Bevis $P(n)$, $n \geq k$ o.h.a. (simpel) induktion:

- Bevis $P(k)$ (Basistilfælde)
- Bevis $\underbrace{P(n-1) \Rightarrow P(n)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \geq k+1$ (Induktionsskridt)

(eller bevis $\underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \geq k$)

Eks: $2^n < n!$ for $n \geq 4$

$$n=4: \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{16} < \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{24}$$

$$n=5: \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{32} < \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{120}$$

$$n=6: 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 < 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$\vdots$

Vi ganger hele tiden med 2 på v.s.
og med større og større tal på h.s.

Bevis: Ved induktion over n

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse:

$$2^{n-1} < (n-1)!$$

Ind. skridt: $n \geq 5$

$$\Downarrow 2^{n-1} < (n-1)!, \text{ ifly. ind. ant.}$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot (n-1)!$$

$$< n \cdot (n-1)!, \quad \text{da } n \geq 5$$

$$\Downarrow 2^n < n!$$



Vi viste

- $P(4)$
- $P(4) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$

Ligesom at vælte domino-brikker:

- I basis-tilfældet viser vi, at den første brik kan væltes.
- I ind. skridtet viser vi, at afstanden ml. brikkene er så lille, at vælter en brik, vælter den næste også.

Prøve selv at bevise, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for } n \geq 1$$

$$\text{O.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsantagelse:

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsskridt: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$$\Downarrow$$
$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

□

Påstand: Alle æbler har samme farve

Ben's: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.:

I enhver skål med $n-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $n \geq 3$

Stil æblerne op på række:



De første $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

De sidste $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $n-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle n æbler samme farve. □

Vi har vist

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$