

Kardinalitet af mængder (afsnit 2.5)

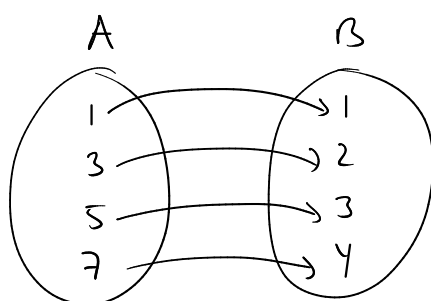
$|A|$: kardinaliteten af A .

Hvis A er endelig, er $|A| = \# \text{ elementer i } A$.

Def. 2.5.2:

A og B har samme kardinalitet
 $\Leftrightarrow \exists$ bijektion $f: A \rightarrow B$

Eks:



$$|A| = |B| = 4$$

Eks:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{L}^+ = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ \quad \mathbb{L}^+$$

$$1 \longrightarrow 2$$

$$2 \longrightarrow 4$$

$$3 \longrightarrow 6$$

$$4 \longrightarrow 8$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{L}^+, \quad f(n) = 2n$$

er en bijektion

Eller

Elementene i A kan stilles op i en uendelig række, som indeholder dem alle.

D.v.s.

$\mathbb{L}^+$ og $\mathbb{Z}^+$ har samme kardinalitet.

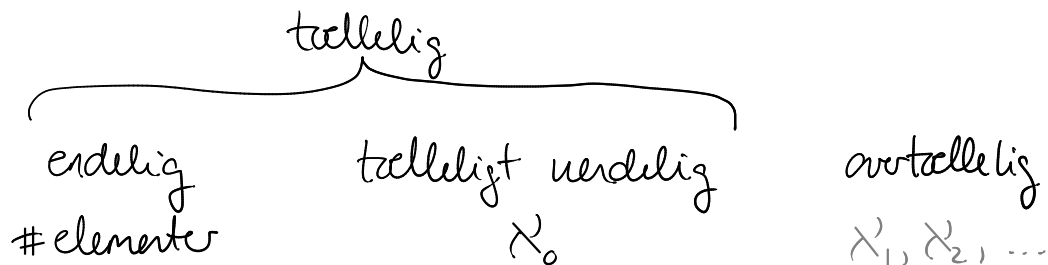
Def. 2.5.4:

Kardinaliteten af $\mathbb{Z}^+$ kaldes $\aleph_0$ (alef 0)

En mængde, som er endelig eller har kardinalitet $\aleph_0$, kaldes tællelig.

En mængde med kardinalitet $\aleph_0$ kaldes tælleligt uendelig.

En mængde, som ikke er tællelig, kaldes avtællelig.



Eks 3: $\mathbb{Z}$ er tællelig:

$0, -1, 1, -2, 2, \dots$

Eller

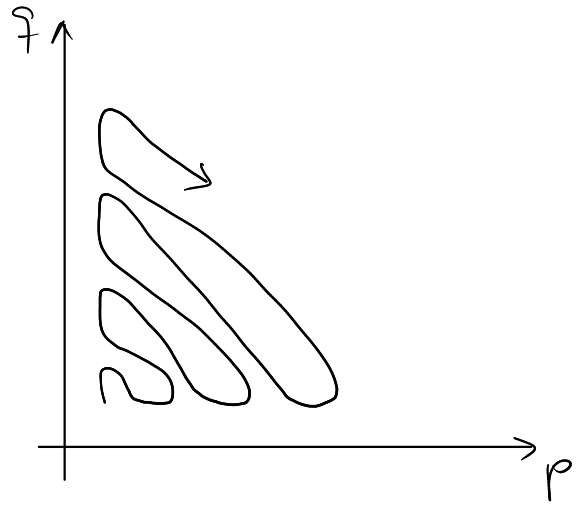
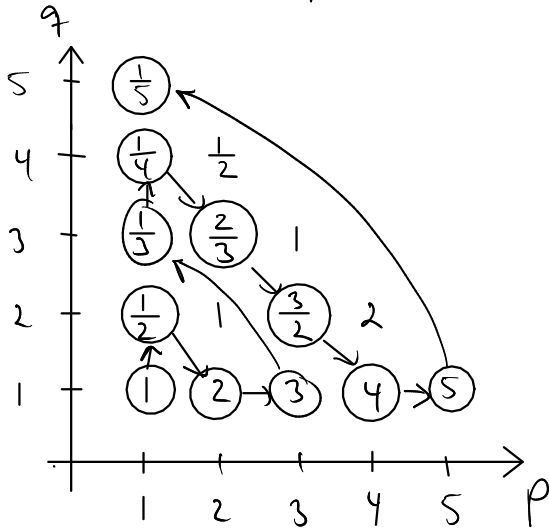
$$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Desuden er $\mathbb{Z}$ uendelig.

D.v.s. $\mathbb{Z}$ har kardinalitet $\aleph_0$.

Eks 4: $\mathbb{Q}^+$ er tællelig:

$$Q^+ = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \}$$


$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Desuden er $\mathbb{Q}^+$ uendeligt, da $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Q}^+$.
D.v.s. $\mathbb{Q}^+$ har kardinalitet $\aleph_0$.

Q er også tællig:

Gør det samme med $\mathbb{Q}^-$

Start med 0, og flet s^2 Q^- og Q^+ , som vi gjorde
det med Z^- og Z^+ .

Eks 5: $\mathbb{R}$ er uædtællig

Diagonalisering:

Antag til modstrid, at $\mathbb{R}$ er tællelig.

Da er $R = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$ tællelig.

D.v.s. elementerne i R kan opremses:



$$r_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}\dots$$

$$r_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}\dots$$

$$r_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}\dots$$

$\vdots$

Hvis vi ikke tillader en uendelig følge af 9-taller, kan hvert tal i R skrives på præcis én måde.

Vi kan konstruere et tal i R , som ikke er med i opremsningen:

$0, d_1d_2d_3\dots$, hvor

$$d_i = \begin{cases} 4, & \text{hvis } d_{ii} \neq 4 \\ 5, & \text{ellers} \end{cases}$$

⚡ $\square$

Eks: $r_1 = 0, 410\dots$

$$r_2 = 0, 420\dots$$

$$r_3 = 0, 430\dots$$

$$0, 544\dots$$