

Kvantorer (afsnit 1.4)

(Quantifiers)

Er $\underbrace{x < 2x}_{P(x)}$?

$P(x)$ er et åbent udsagn

x er en fri variabel

" $< 2x$ " er et prædikat

$P(-1)$ er udsagnet $-1 < -2$ F

$P(0)$ er udsagnet $0 < 0$ F

$P(1)$ er udsagnet $1 < 2$ S

Mer generelt:

$P(x)$ er sand, hvis $x > 0$.

D.v.s.

$P(x)$ er sand, hvis $x \in \mathbb{Z}^+$

← mængden af positive heltal

D.v.s.

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$

Kan også skrives:

$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x$ S udsagn (d.v.s. har en sandhedsværdi)
↑ "For alle" ↑ "gælder"
(udelades nogle gange)
 x er en bundet variabel

universet/domænet (kan udelades, hvis det er underforstået)

Udvid universet:

$\forall x \in \mathbb{Z} : x < 2x$ F (Eks: $x = -1$)

Universet kan også indskrænkes:

indskrænker universet

$$\Updownarrow \forall x \in \mathbb{Z}, \overbrace{x \geq 3} : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : x+3 \leq 2x$$

$\Updownarrow$ Vi vender tilbage til mængde-notation senere...

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)$$

$$Q(x) : x+3 \leq 2x$$

Der findes mindst et positivt heltal, som opfylder Q

D.v.s.

$$Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots$$

D.v.s.

"der
eksisterer"

"sådan at"

$$\exists x \in \mathbb{Z}^+ :$$

$$x+3 \leq 2x$$

S

} også fra sidst

$\Downarrow$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x$$

S

(universet er uendeligt)

Man kan også indskrænke universet, ligesom for $\forall$:

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 : x+3 \leq 2x$$

$F \quad (x \leq 1 \Rightarrow x+3 > 2x)$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S \quad (x=0)$$

Dette udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S$$

↖ "Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad F \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad F \quad (x=3, x=4, \dots)$$

$\exists$ og $\forall$ er kvantorer

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \begin{array}{l} \swarrow \left(\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \right) \vee x \geq 4 \\ \searrow \forall x \in \mathbb{N} : (x \leq 3 \vee x \geq 4) \end{array}$$