

Sidste gang:

- Aktivluser (Tabel 1.3.6-8)

F.eks.:

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Distributive love

De Morgans love

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

- Tautologi, modstrid, kontingens
- Kvantorer

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+x = x$$

Negering af kvantificerede udsagn:

Hvad er det modsatte af $\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} \Downarrow & \quad \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^f) & S \\ & \quad \exists x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & S \end{aligned}$$

Hvad er det modsatte af $\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} \Downarrow & \quad \neg(\overbrace{\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x}^S) & F \\ & \quad \forall x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x & F \end{aligned}$$

De Morgans Love for kvantorer:

$$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

Flere eksempler:

$$\begin{array}{l} \text{De Morgan} \\ \text{for kvantorer} \end{array} \Downarrow \neg(\exists x \in \mathbb{N} : 2^x < x) \\ \forall x \in \mathbb{N} : 2^x \geq x \quad S$$

$$\begin{array}{l} \text{De Morgan} \\ \text{for kvantorer} \end{array} \Downarrow \neg(\forall x \in \mathbb{N} : (x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x)) \\ \Downarrow \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x \vee 2^x < 2x) \\ \text{De Morgan} \Downarrow \exists x \in \mathbb{N} : (x+3 > 2x \wedge 2^x \geq 2x) \quad S \text{ (eks: } x=1)$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{De Morgan for quantifiers} & \updownarrow & \neg(\overbrace{\forall x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)}^S) \\
\text{Table 7} & \updownarrow & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x) \\
\text{De Morgan} & \updownarrow & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x < 3 \vee x+3 \leq 2x) \\
& & \exists x \in \mathbb{N} : (x \geq 3 \wedge x+3 > 2x) \quad F
\end{array}$$

Indledende kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

$$P(x,y) : x+y = 0$$

$P(2,3)$ er falsk

$P(2,-2)$ er sand

Q: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Er sandt, hvis følgende er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x+y = 0$$

S (sæt $y = -x$)

Kan skrives mere præcist:

R: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ S

Har kvantorenes orden betydning?

S: $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x+y = 0$ F

Vælg et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x+y = 0$$

Ja!

S er stærkere end Q :

$$S \Rightarrow Q$$

$$Q \not\Rightarrow S$$

$$P_1(x) : x > 10$$

$$P_2(x) : x > 20$$

P_2 er stærkere end P_1

$|$ Q kan man vælge et nyt y for hvert x

$|$ S skal der være et y , der "virker" for alle x .

R er også stærkere end Q

Eks:

S : Mgd. af stud. i dette lokale

H : Mgd. af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$$\forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y)$$

$$\exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y)$$

Der findes en hobby, som alle studerende i dette lokale har.

Flere eksempler:

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$$

F

(eks: $y = x$)

$$\forall y \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} : x > y$$

S

(eks: $x = y + 1$)

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$$

S

(eks: $x = 0$)

Eks (negering):

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \neg(\forall y \in \mathbb{Z} : x > y) \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$$

Eks (ens kvantorer):

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \quad S \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z} : (2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \cdot y) \end{aligned}$$

Når kvantorerne er ens, må man gerne ændre rækkefølgen.
Her skal udsagnet f.eks. gælde for alle per $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

S Eks: $x=1, y=1$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x + y < 10$$

(Læs Tabel 1, s. 56)

Eks (tre kvantorer):

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

S Eks: $y=x$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z$$