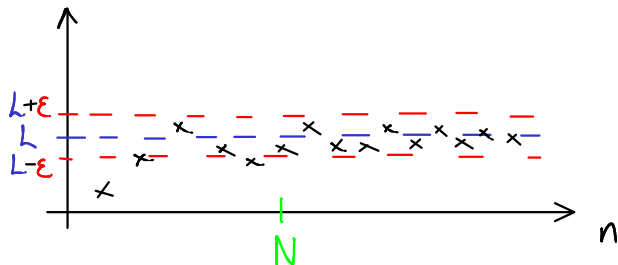


Sidste gang:

Def 2: $\{a_n\}$ konverger mod L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$



Regneregler

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Sætning 3:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, hvis $|x| < 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$

Def. 3:

Betrakt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og lad $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$

Da kaldes s_n rækkens n 'te partielle sum

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$,

siges $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at konvergere mod s .

Dette skrives også som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks: $a_n = (\frac{1}{2})^n$

$$\{a_n\} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\rangle$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\{s_n\} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots \right\rangle$$

$\{s_n\}$ konvergerer mod 1.

Eks

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{hvis } r \neq 1$$

D.v.s

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \begin{cases} \text{konvergerer mod } \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \\ \text{divergerer}, & \text{hvis } r \leq -1 \end{cases}$$

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regnearbejder, som vi mødte i afsnit 9.1.

Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7:

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c A$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$ for alle $n \geq 1$
 $\Leftrightarrow A \leq B$

Eks 4:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Harmonisk række

$$H_n = S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

n'te harmoniske tal

H_n optræder i mange sammenhænge, f.eks.:

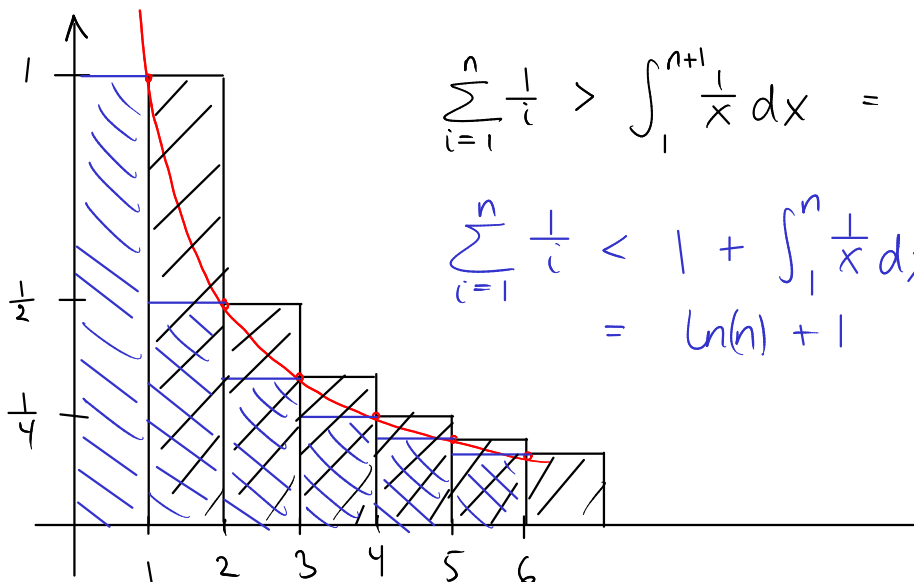
Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pakker med et klistmærke i hver
n forskellige klistmærker

For at få et af hver slags skal man i gennemsnit
købe nH_n pakker:

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1}\right)$$

Hvor mange Corn Flakes - pakker skal vi så købe?



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = \ln(n) + 1$$

D.v.s.

$$\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$$

$\Rightarrow$ vi skal i gennemsnit købe $\approx n \ln n$ pakker.

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .

Sætning 4

$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

Bemærk: ikke $\Uparrow$!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

D.v.s.

$$\Downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

Beweis:

Def. 3:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

$\Uparrow$

$$\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

D.v.s.

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}, \text{ ifølge Sætning 7}$$

$$= s - s$$

$$= 0$$

□

HUSK at det modsatte **ikke** gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverger mod ∞ .

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en **nødvendig**, men **ikke tilstrækkelig betingelse** for, at $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

Eks 5(a):

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ diverger mod ∞ , da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$.

Sætning 5:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer
 $\Updownarrow$
 $\exists N \geq 1 : \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer

Basis: opgave 23

D.v.s. konvergenen afhænger kun af rækens "hale" (tail).

D.v.s. det er ok blot at udføre konvergenstests'ne i afsnit 9.3 på rækens hale.

Afsnit 9.3: Konvergens-tests for positive rækker

Sætning 9 (Sammenligningstesten):

Hvis $\exists N, K \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$,

da gælder:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer}$$

Beris: Læs selv.

Eks 3

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} \text{ konvergerer iflg. Sætning 9a:}$$

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}, \text{ for } n \geq 1$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ divergerer iflg. Sætning 9b:}$$

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2$$

Husk, at Sætning 9 **ikke** siger, at $\sum a_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum b_n \text{ konvergerer}$.

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grøse-sammenlignings-testen):

Hvis

$\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0 \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

(a) $(L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger}) \Rightarrow a_n \text{ konverger}$

(b) $(L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverger mod } \infty) \Rightarrow$
 $a_n \text{ diverger mod } \infty.$

Beweis:

(a) $L < \infty$
 $\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + \underbrace{1}_{\varepsilon \text{ i Def. 2}}, \text{ iflg Def. 2}$
 $\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$

D.v.s.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger},$
iflg. Sætning 9(a)

(b) bevises på tilsvarende vis v.h.s. Sætning 9(b).

□

Sætning 10 er nogle gange lidt lettere at anvende end Sætning 9