

Sidste gang: Rækker

Sætning 7:

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B$

(c) $\Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \leq b_n \text{ for alle } n \geq 1 \\ A \leq B \end{matrix}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

Harmonisk række

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

n'te harmoniske tal

$$\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$$

D.v.s. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ diverger mod uendelig.

Sætning 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

NB: $\Leftarrow$ gælder ikke

Sætning 5: (konvergens afhænger kun af "halen")

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists N \geq 1 : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

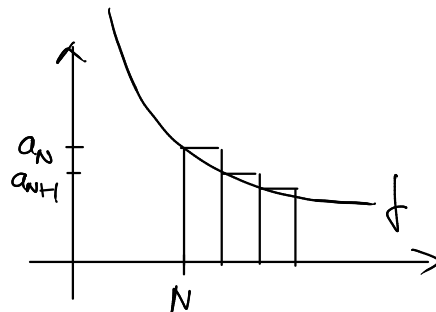
Sætning 8 (Integralkriteriet)

Hvis $a_n = f(n)$,

hvor f er positiv, kontinuert og
aftagende på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$

da gælder, at

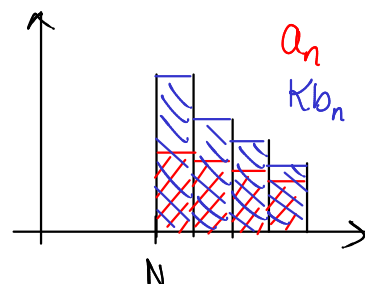
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konvergerer}$$



Sætning 9 (Sammenlignings-kriteriet):

Hvis $\exists N, K \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$,

da gælder:



(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div. mod $\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div. mod ∞

Af Sætning 9 følger:

Sætning 10 (Grænse-sammenlignings-kriteriet)

Hvis

$\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \geq 0 \text{ (evt. } = \infty)$$

da gælder

(a) $(L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer}) \Rightarrow a_n \text{ konvergerer}$

(b) $(L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer mod } \infty) \Rightarrow$
 $a_n \text{ divergerer mod } \infty.$

Eks 9.3.1: p -rækker (Generaliserer H_n)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergerer, hvis } p > 1 \\ \text{div konverger mod } \infty, \text{ hvis } p \leq 1 \end{cases} \text{ God at huske!}$$

Bevis:

$$p \leq 0: \frac{1}{n^p} = n^{\overbrace{-p}^{\geq 0}}$$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} > 0$$

Dermed **div konverger** rækker **mod** ∞ ifølge Sætning 4.

$p > 0$:

Integral-kriteriet...

Sætning 11 (forhøldskriteriet / kvotientkriteriet (ratio test))

Hvis

- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0$ ($a_n > 0$ ultimately)
- $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er uendelig

da gælder:

$$(a) \quad 0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \quad 1 < \rho \leq \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$$(c) \quad \rho = 1: \text{ ingen information }$$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{konverger}$$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ konverger/diverger?

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}, \quad \text{ifølge regneregler s. 499 \u00f8.}$$

$$= 1 \cdot \dots \cdot 1$$

$$= 1$$

Forholdskriteriet egner sig bedst til r\u00e6kker, hvis led aftager "hurtigt".

Sætning 12 (Rødttesten):

Hvis

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0, \quad \text{og} \\ \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > -\infty \quad (\text{eksisterer eller er } +\infty)$$

da gælder

$$(a) \quad 0 \leq \sigma < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger}$$

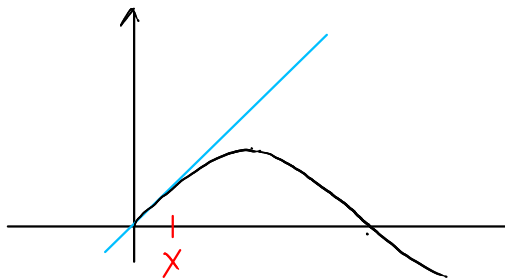
$$(b) \quad 1 < \sigma \leq \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverger mod } \infty$$

$$(c) \quad \sigma = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konverger / diverger}$$

Potensrækker - "opvarmning"

Hvordan beregner man $\sin(x)$?

$\sin$ er en transcendent funktion. D.v.s. $\sin(x)$ kan ikke beregnes via et endeligt antal $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt{\quad}$ - operationer. Men vi kender f.eks. $\sin(0)$.



$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x = x$$

Dårlig approx., hvis x er stor.

Lidt bedre approx.:

$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{\sin''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin'''(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x - \frac{\sin(0)}{2} \cdot x^2 - \frac{\cos(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$0 + x - 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

Helt præcist:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \leftarrow \text{Taylor-række}$$

Taylor-rækker er potensrækker

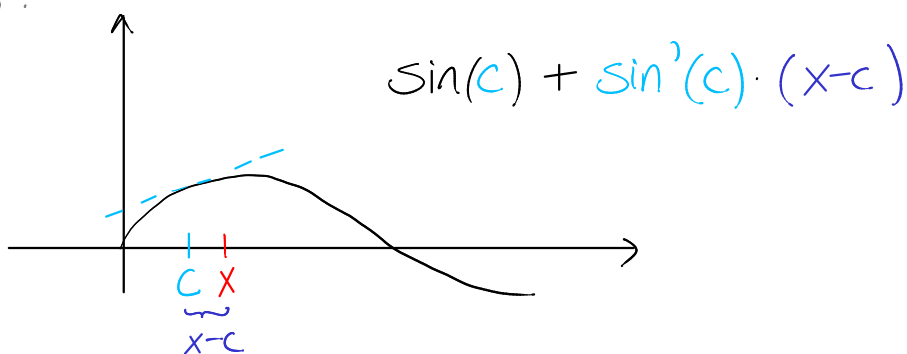
Mange funktioner kan skrives som potensrækker, evt. bare i et begrænset interval.

Vi har allerede set nogle eksempler. F.eks.:

For $-1 < x < 1$ gælder

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Man kunne selvfølgelig tage udgangspunkt i et andet punkt end $x=0$:



$$\sin(x) = c + \sin'(c) \cdot (x-c) + \frac{1}{2} \sin''(c) \cdot (x-c)^2 + \dots$$

Taylorrækken for $\sin$ omkring c

Potensrækker (Adams afsnit 9.5)

Def. 9.5.7:

En række på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ kaldes en potensrække omkring c .

Ex:

$1+x+x^2+\dots$ er en potensrække omkring 0.
Rækken konverger mod $\frac{1}{1-x}$, for $x \in (-1, 1)$.
0 er midtpunktet i dette interval. Det er ikke tilfældigt:

Sætning 17:

For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ gælder et af følgende tre udsagn:

(i) Rækken konverger kun for $x=c$. ($R=0$)

(For $x=c$, er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$)

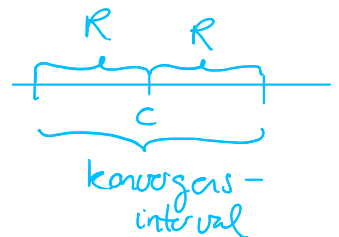
(ii) Rækken konverger for ethvert $x \in \mathbb{R}$. ($R=\infty$)

(iii) Der findes et $R \in \mathbb{R}$, så rækken

- konverger, hvis $|x-c| < R$

- diverger, hvis $|x-c| > R$.

D.v.s. rækken konverger måske for $x = c \pm R$



R kaldes rækkens konvergensradius, og
 c kaldes rækkens konvergens-centrum.

Eks:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ har konvergensradius 1 (konv. int. $(-1, 1)$)

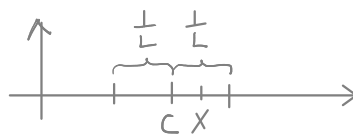
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ har konvergensradius ∞ .

Howdan bestemmes konvergensradius?

følge Kootient-kriteriet konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, hvis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)}{a_n} \right| \\ &= \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)}_L |x-c| < 1. \end{aligned}$$

O.v.s. hvis $|x-c| < \frac{1}{L}$



O.v.s. hvis grænseværdien $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ eksisterer, da er

$$R = \frac{1}{L}$$

($L=0 \Rightarrow R=\infty$ og $L=\infty \Rightarrow R=0$)

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 = L$$

$$\text{D.v.s. } R = \frac{1}{L} = 1$$

D.v.s. rækken konvergerer, når $2 < x < 4$

Check: Stemmer med, at konvergensintervallet blot er forskudt med 3 i forhold til $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Bemærk, at rækken konvergerer, når $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-3)^n = 0$

D.v.s. den nødvendige betingelse fra Sætning 4 er i dette tilfælde tilstrækkelig.

Eks 9.5.2a): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$c=0$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

D.v.s.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D.v.s.

$$R = \infty$$

D.v.s.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

| Eks 9.6.1 får vi at se, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.