

Sidste gang: Funktioner

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

$\nearrow$ $\text{Dom}(f)$ $\uparrow$ sekundær-mængde

$$\text{Vm}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Surjektiv: sek.mgd. = Vm

Injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Invertibel $\Leftrightarrow$ bijektiv

$$\text{Invers: } f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f+g$$

$$f \cdot g$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$f^2 = f \circ f$$

(Strengt) voksende / aftagende

voksende / aftagende $\Rightarrow$ monoton

Relationer (afsnit 9.1)

Beskriver en sammenhæng mellem elementer i en eller flere mængder.

Bruges f.eks. i databaser

Eks:

(studie-nr, navn, adresse, uddannelse) kvartær rel.

(studie-nr, kursus) binær relation

$<, =, |$, „er barn af“ binære relationer

Def. 9.1.1: Lad A og B være mængder.

En binær relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

Eks. overfor:

A : mængde af studie-nr.

B : mængde af kurser

A og B kan også være tal, eks: $<, =, |$

Eks: Relation fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} R_{\text{inv}} &= \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \} \\ &= \{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \} \end{aligned}$$

NB: $(2, \frac{1}{2}) \in R_{\text{inv}}$, men
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{\text{inv}}$

$(a,b) \in R$ skrives også

aRb og læses

"a er relateret til b gennem R"

↑
rækkefølgen har betydning
(medmindre R er symmetrisk)

$(a,b) \notin R$ skrives også

$a \not R b$

Eks: $5 R_{\text{inv}} \frac{1}{5}$, men $6 \not R_{\text{inv}} \frac{1}{5}$

Eks: $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b \}$
 $= \{ (0,1), (0,2), (1,2), (0,3), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner (hvorfor?)

Eks: $R_{\text{abs}} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \vee a = -b \}$
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 9.1.2: Lad A være en mængde
En relation på A er en relation fra A til A ,
d.v.s. en delmængde af $A \times A$.

(Fra nu af kun denne slags relationer)

Eks: $R_<$ hvorfor er en relation på $\mathbb{N}$.
 R_{abs} er en relation på $\mathbb{Z}$.

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

Man kan repr. rel. v.h.a.

- Opremsning
 - Mængde-byggeset - notation
 - Matricer (Hvis A, B endelige)
 - Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
(digraphs)
- } har vi allerede set

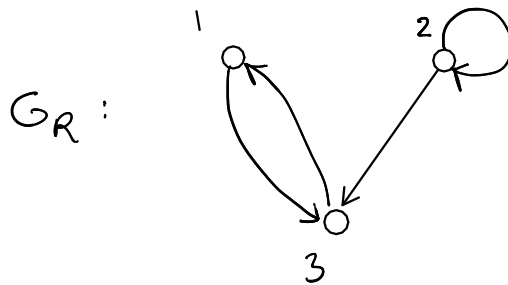
Eks: Relation på $A = \{1, 2, 3\}$:

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

Matrix-repr.:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf-repr.:

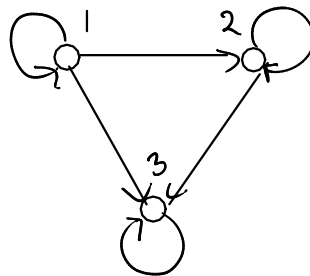


3 knuder og
4 kanter, hvoraf
der ene er et
loop.

Eks: $R_{\leq} = \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b\}$

$$M_{R_{\leq}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$G_{R_{\leq}}$:



Eks: $R_{\equiv}$ relation på $\{1, 2, 3, 4\}$
 $R_{\equiv} = \{(a, b) \mid a \equiv b \pmod{2}\}$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber (afsnit 9.1)

Def. 9.1.3: R : relation på A
 R er **refleksiv**, hvis
 $(a, a) \in R$ for alle $a \in A$

Eks:

$\checkmark$: $R_{\leq}$, R_{abs} , $R_{\equiv}$, $R_{=}$, R_1

$\times$: R , $R_{\lt}$, $R_{\neq}$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?
 graf-

Lukninger (afsnit 9.4)

R : relation på A .

Den **refleksive lukning** af R er
 $R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at R er refleksiv.

Eks: Refleksive lukning af R :

$$\{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3) \}$$

Refleksive lukning af $R_<$:

$$\begin{aligned} & \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b \vee a = b \} = \\ & \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b \} \end{aligned}$$

Def. 9.1.4: R : relation på A .

R er symmetrisk, hvis

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad \text{for alle } a, b \in R$$

Eks:

$$\checkmark: R_{=}, R_{\neq}, R_{\text{abs}}, R_{\neq}$$

$$\times: R_{<}, R_{\leq}, R_{|}, R$$

Lukninger — mere generelt:

R : relation

P : egenskab

Lukningen af R m.h.t. P er den minimale mængde R' , som opfylder

$$- R \subseteq R'$$

- R' har egenskaben P

Minimal: Hvis man fjerner et element (ligegyldigt hvilket), har R' ikke længere egenskaben P .

Den symmetriske lukning af R er

$$R \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Eks: Symmetrisk lukning af

- $R_<: R_< \cup R_> = R_{\neq}$
- $R_{\leq}: R_{\leq} \cup R_{\geq} = A \times A$
- $R_{=}: R_{=}$
- $R: R \cup \{(3,2)\} = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

Def. 9.1.4:

R er antisymmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eks:

Anti-symmetrisk: $R_<, R_{\leq}, R_{=}, I$

Symmetrisk: $R_{=}$

Ingen af delene: $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$

Antisymmetrisk lukning findes ikke.

For at gøre en ikke-antisymmetrisk relation antisymmetrisk skal man fjerne elementer.

Def. 9.1.5: R relation på A

R er transitiv, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \text{for alle } a,b,c \in R,$$

Eks:

$$\checkmark: R_{\leq}, R_{<}, R_{=}, R_{\equiv}, R_{\text{abs}}, R_1,$$

$$\times: R_{\neq}, \{(1,2), (2,3), (3,3)\} = S$$

Transitiv lukning af $S: \{(1,2), (2,3), (1,3), (3,3)\}$

Nogle gange skriver det om sig:

Transitiv lukning af

$$T = \{ \underline{(1,2)}, \underline{(2,3)}, \underline{(3,1)} \}$$

Tilføjer

$$T \circ T = T^2 = \underline{(1,3)} \quad \underline{(2,1)} \quad (3,2)$$

$$T \circ T^2 = T^3 = (1,1) \quad (2,2) \quad (3,3)$$

$\parallel$

$T^2 \circ T$ (svare til stier af længde 3 i G_T)

