Sidste gang : mængder

$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,1,1,3,2\} = M$

$|M| = 3$

$\{0,2,4,6,\dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$

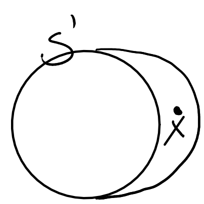
$\{\} = \emptyset$

$\subseteq, \subset$

$\cup, \cap, -, \overline{}, \times$

$P(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$

$|P(S)| = 2^{|S|}$:



$|S'| = n-1$

$S = S' \cup \{x\}$

delmængder uden x   # delmængder med x

$|P(S')| = 2^{n-1} \Rightarrow |P(S)| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$

Tabel 2.2.1 s. 132 ~ Tabel 1.3.6 s. 25

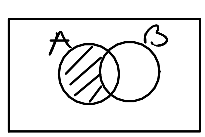
$\cup \sim \vee$

$\cap \sim \wedge$

Eks: De Morgans Love, Distributive Love

Venn-diagram

Eks:



$A - B$

Stærk induktion (Afsnit 5.2):

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som en sum af 2-taller og 5-taller

D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\left.\begin{aligned} n=4 &= 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ n=5 &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{aligned}\right\} \text{Basis}$$

$$n=6 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0$$

$$n=7 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$$

$$n=8 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0$$

$$\vdots$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \cdots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \cdots$$

Brug en mere generel formulering af induktions-princippet:

Stærk induktion:

Bevis $P(n)$, $n \geq k$

- Bevis $P(k), P(k+1), \ldots, P(\ell)$, $\ell \geq k$ (Basis)
- Bevis $\underbrace{(P(k) \wedge \ldots \wedge P(n-1))}_{\text{Induktionsantagelse}} \Rightarrow P(n)$, $n \geq \ell + 1$ (Induktions-skridt)

(eller bevis $(P(k) \wedge \ldots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$, $n \geq \ell$)

Eks ovenfor: $k=4$, $\ell=5$

Simpel induktion

$P(k)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

$P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$

$\vdots$

Stærk induktion (med $k=\ell$)

$P(k)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

$P(k) \wedge P(k+1) \wedge P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$

$\vdots$

Ind. ant:

$$\forall k \in \{\underline{4,5,\dots,n-1}\} : \exists a,b \in \mathbb{N} : k = 2a+5b$$

D.v.s.

$$\exists a,b \in \mathbb{N} : \underline{n-2} = 2a+5b, \quad \text{hvis } n \geq 6$$

Ind. skridt: $n \geq 6$

$$n = \underbrace{(n-2)}_{\geq 4}+2$$

$$= (2a+5b)+2, \quad \text{hvor } a,b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$

$\square$

Bemærk, at vi har brug for både $n=4$ og $n=5$ i basis.
Hvis vi kun har $n=4$, beviser vi kun udsagnet for n lige.

Vi har vist:

- $P(4)$
- $P(5)$
- $P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$

$\vdots$

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks: Fibonacci-tallene

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Basis-skridt}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad \} \text{ Rekursivt skridt}$$

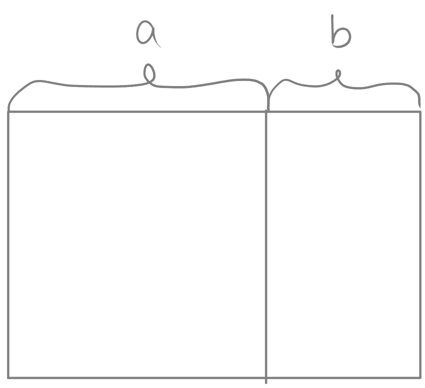
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$

Vokser eksponentielt:

Eks 4: $f_n > \varphi^{n-2}, \quad n \geq 3$, hvor

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \quad \text{(Golden ratio)}$$

Gyldne snit:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \iff \frac{a}{b} = \varphi$$

φ har mange interessante egenskaber.
En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 1 + \varphi \quad (*)$$

Basis

- $f_3 = 2$

  $\varphi^{3-2} = \varphi \approx 1{,}618 < f_3$ – OK!

- $f_4 = 3$

  $\varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1+\varphi \approx 2{,}618 < f_4$ – OK!

- $f_5 = f_4 + f_3$

$$
\begin{aligned}
&> \varphi^2 + \varphi \qquad \text{(bevist ovenfor)} \\
&= \varphi(\varphi+1) \\
&= \varphi \cdot \varphi^2, \qquad \text{iflg. } (*) \\
&= \varphi^3
\end{aligned}
$$

Induktionsantagelse:

$f_k > \varphi^{k-2}, \quad 3 \leq k \leq n-1$

D.v.s.

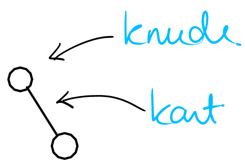
$f_{n-1} > \varphi^{n-3}$ og $f_{n-2} > \varphi^{n-4}$, hvis $n \geq 5$

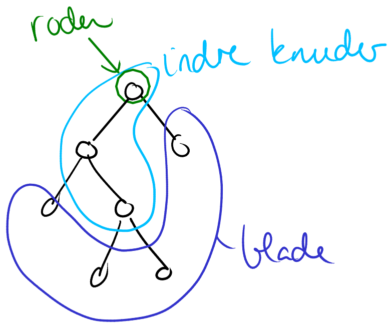
Induktionsskridt: $n \geq 5$

$$
\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\
&> \varphi^{n-3} + \varphi^{n-4}, \qquad \text{iflg. ind.ant.} \\
&= \varphi^{n-4}(\varphi+1) \\
&= \varphi^{n-4} \cdot \varphi^2, \qquad \text{iflg. } (*) \\
&= \varphi^{n-2}
\end{aligned}
$$

$\square$

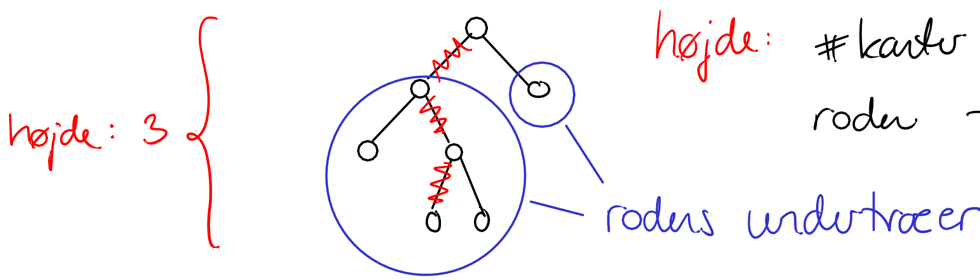
Eks: Fulde binære træer





indre knuder har to børn hver

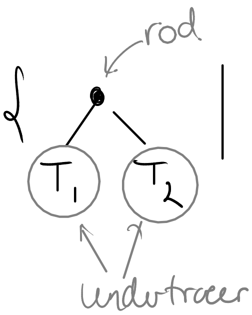
blade har ingen børn



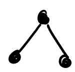
højde: # kanter i længste sti fra roden til et blad

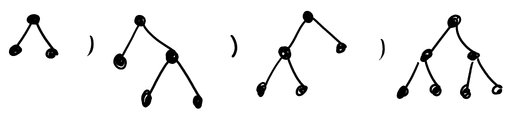
Def. 5.35: Fulde binære træer

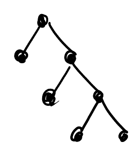
Basis-skridt: $S_0 = \{\bullet\}$

Rek. skridt: $S_n = S_{n-1} \cup \{$  $\mid T_1, T_2 \in S_{n-1}\}, \; n \geq 1$

D.v.s.

$S_1 = \{\bullet,$  $\}$

$S_2 = \{\bullet,$  $\}$

$S_3 = \{ \underline{\qquad\qquad}, \underline{\qquad\qquad},$  $, \dots \}$

$(\, |S_3| = 26 \,)$

Strukturel induktion

Bevis $P(S_n)$, $n \geq 0$:

- Bevis $P(S_0)$
- Bevis, at $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n)$ for alle $n \geq 1$.

Påstand: For ethvert fuldt binært træ T gælder

$$b(T) = i(T) + 1,$$ hvor

$b(T) = $ # blade i T

$i(T) = $ # indre knuder i T

Bevis: Ved strukturel induktion

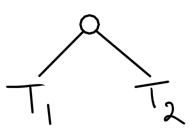
Basis: $\{\bullet\}$

$i(T) = 0$

$b(T) = 1 = i(T) + 1$ ✓

Ind. ant: $b(T) = i(T) + 1$ for alle $T \in S_{n-1}$

Ind. skridt: S_n



$\in S_n \Rightarrow T_1, T_2 \in S_{n-1}$

$\Rightarrow$ roden er en indre knude

D.v.s.

$$i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1$$ og

$$\begin{aligned} b(T) &= b(T_1) + b(T_2) \\ &= (i(T_1)+1) + (i(T_2)+1), \quad \text{iflg. ind. ant.} \\ &= (i(T_1) + i(T_2) + 1) + 1 \\ &= i(T) + 1 \end{aligned}$$

$\square$