

Sidste gang:

Logiske operatorer: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Sandhedstabeller for operatorer og sammensatte udsagn

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad (\text{Tabel 1.3.8})$$

1 dag:

$\oplus$

Præcedens: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Flere ækvivalenser:

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

$$\left. \begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned} \right\} (\text{Tabel 1.3.6})$$

Tabel 1.3.6, 1.3.7 og 1.3.8 er nyttige!

Læs gerne dem alle tre igennem.

Åbne udsagn

Kvantorer: $\forall, \exists$

$p \oplus q$: eksklusiv eller

enten p eller q

p og q er forskellige

$$\text{D.v.s } p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$$

$$\text{og } p \oplus q \Leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow q$$

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Hvordan sætter man parenteser?

Procedur:

Ikke konsensus om $\oplus$'s placering i hierarkiet.

Løsning: brug parenteser.

$$\neg p \vee q \begin{cases} (\neg p) \vee q \\ \neg(\cancel{p \vee q}) \end{cases} \quad ?$$

$$\neg p \vee q \Leftrightarrow (\neg p) \vee q$$

$$p \vee q \wedge r \begin{cases} (\cancel{p \vee q}) \wedge r \\ p \vee (q \wedge r) \end{cases} \quad ?$$

$$p \vee q \wedge r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$$

En ækvivalens mere fra Tabel 1.3.7 (1. linje):

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Beis to og to!

Beis:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	
S	S	S	S	} (1)
S	F	F	F	
F	S	S	S	} (2)
F	F	S	S	

Kan også argumentere for flere rækker ad gangen:

For begge udtryk gælder:

(1): Hvis p er sand, skal q også være det

(2): Hvis p er falsk, er udtrykket sandt

Tabel 1.3.6 (s. 25) er også vigtig

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive Love: (lidt som at gænge ind i parentes)

$$(1) \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Sandhedstabellen har 8 rækker

For begge udtryk gælder:

- Hvis p er sand, er udtrykket sandt.
D.v.s. der står S i de fire rækker, hvor p er sand.
- Hvis p er falsk, skal både q og r være sande.
D.v.s. der står S i rækken, hvor $p \Leftrightarrow F$ og $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow S$, og F i de resterende 3 rækker

$$(2) \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Bevis to af to

For begge udtryk gælder

- p skal være sand
- mindst en af q og r skal være sand,
men de behøver ikke begge være sande

De Morgans Love

$$(1) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Beis: opgave 1.3.2

Beis: Tabel 1.3.3 (s.24)

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(2+2=4 \vee 3>5) \\ \Downarrow & \\ & \neg(2+2=4) \wedge \neg(3>5) \\ \Downarrow & \\ & 2+2 \neq 4 \wedge 3 \leq 5 \end{aligned}$$

F

$$\begin{aligned} & \neg(2+2=4 \wedge 3>5) \\ \Downarrow & \\ & 2+2 \neq 4 \vee 3 \leq 5 \end{aligned}$$

S

Efterhånden, som vi har flere og flere ækvivalenser at gøre godt med, er sandhedstabeller ikke nødvendigvis den mest effektive måde at bevise nye ækvivalenser:

Eks 1.3.6 (s. 27-28)

Tabel 1.3.7, linje 5
$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Bevis:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) && \text{(Tabel 1.3.7, 21)} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q && \left\{ \begin{array}{l} \text{(De Morgan (2))} \\ \text{(Dobbelt-neg. loven)} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q && \text{(Tabel 1.3.6)} \end{aligned}$$

Virker det rimeligt?

Ja:

$p \Rightarrow q$ er falsk, netop når p er sand, og q er falsk.
 $p \wedge \neg q$ er sand, netop når _____

Check også Tabel 1.3.8!

Lidt mere terminologi:

Def. 1.3.1 (s.23)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**, uanset sandhedsværdier af de udsagn, som indgår

Eks: $p \vee \neg p$

$$p \Leftrightarrow p$$

$$p \Rightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{og alle de andre} \\ \text{ækv. i afsnit 1.3})$$

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**, uanset sandhedsværdier af de udsagn, som indgår
(**Contradiction**)

Eks: $p \wedge \neg p$

$$p \Leftrightarrow \neg p$$

$$p \oplus p$$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi eller en modstrid

Eks: $p \vee q$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow \neg p$$

Heltal : $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Positive heltal : $\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Naturlige tal : $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$

NB: Noget definerer $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Afsnit 1.4: Kvantorer (Quantifiers)

Eks

$$P(x) : x > 0$$

$P(x)$ er et åbent udsagn (propositional function)

D.v.s. sandhedsværdier afhænger af en eller flere frie variable.

x er en fri variabel

" $x < 2$ " er et prædikat

⋮

$P(-1)$ er udsagnet $-1 > 0$ F

$P(0)$ er udsagnet $0 > 0$ F

$P(1)$ er udsagnet $1 > 0$ S

$P(2)$ er udsagnet $2 > 0$ S

⋮

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$$

Kan også skrives sådan:

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : P(x) \text{ eller}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x > 0} \text{ — udsagn}$$

↑
"for alle"

↑
"universet"
"domænet"

↑
"gælder"
"udelades nogle
gange"

kan udelades, hvis det er underforstået

Eks:

Udvid universet:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0 \quad F$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0 \quad S$$

Eks:

Universet kan også indskrænkes:

$$\updownarrow \quad \forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : 2x \geq 4 \quad S$$

$$\updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 3 : 2x \geq 4 \quad \text{indskrænket universet}$$

$$\updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4)$$

$$\updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 2 \vee 2x \geq 4$$

Bemærk, at udsagnet $\forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4)$ illustrerer, at dif. af $\Rightarrow$ er meningsfuld:

$$\vdots$$
$$x = 1 : F \Rightarrow F$$

$$x = 2 : F \Rightarrow S$$

$$x = 3 : S \Rightarrow S$$

$$\vdots$$

$$S \Rightarrow F \quad \text{opstår ikke}$$