

Sidste gang:

$$\oplus \quad (p \oplus q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$$

precedens: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$



Ækvivalenser fra Tabel 1.3.6 og 1.3.7

Benyt o.h.a.

- sandhedstabeller
- andre ækvivalenser

Tautologi, modstrid, kontingens

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{N}$

Åbne udsagn

$\forall$

1 dag:

$\exists$

$\neg \exists, \neg \forall$

Indlejrede kvantorer

Practicalities

Støj + computere

Studieteknik

Check kursus - hjemmeside regelmæssigt

Forberedelse til T-timer

Eks: (fra sidst)

$$\begin{aligned} & \updownarrow \forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : 2x \geq 4 \quad S \\ & \updownarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 3 : 2x \geq 4 \quad \text{indskrænket universet} \\ & \updownarrow \forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4) \\ & \updownarrow \forall x \in \mathbb{Z} : (x \leq 2 \vee 2x \geq 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \{2, 3, 4, \dots\} : 2x \geq 4 \quad S \\ \Downarrow & \forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : 2x \geq 4 \end{aligned}$$

Bemærk, at udsagnet $\forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow 2x \geq 4)$ illustrerer, at def. af $\Rightarrow$ er meningsfuld:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x=1: & \text{F} \Rightarrow \text{F} \\ x=2: & \text{F} \Rightarrow \text{S} \\ x=3: & \text{S} \Rightarrow \text{S} \\ & \vdots \end{aligned}$$

$\text{S} \Rightarrow \text{F}$ opstår ikke

Eks

$$Q(x) : 2x \geq 4$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \quad \text{F} \\ \Updownarrow & \\ & Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3) \wedge \dots \end{aligned}$$

Mer:

$$\begin{aligned} & Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots \quad \text{S} \\ \Updownarrow & \\ & \exists x \in \mathbb{Z}^+ : Q(x) \\ \Updownarrow & \\ & \exists x \in \mathbb{Z}^+ : 2x \geq 4 \end{aligned}$$

↑ "der eksisterer" ↖ "siden af"

Uden universet:

$$\exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \quad \text{S}$$

Indskrænk universet:

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \geq 10 : 2x \geq 4 \quad \text{S}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 : 2x \geq 4 \quad \text{F}$$

Eks

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \text{S} \quad (x=0)$$

Dette udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad \text{S}$$

↑ "Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad \text{F} \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4 \quad \text{F}$$

$\forall$ og $\exists$ er kvantorer (quantifiers)

$\forall$: universal quantification

$\exists$: existential quantification

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$

Eks

$$\forall x \in \mathbb{Z}: x \leq 3 \vee x \geq 4 \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{Z}: (\cancel{x \leq 3} \vee x \geq 4) \\ (\forall x \in \mathbb{Z}: x \leq 3) \vee x \geq 4 \end{cases}$$

Negering af kvantorer

Eks

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4) \quad S \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 4) \quad F \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \neg(2x \geq 4) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : 2x < 4 \end{aligned}$$

General

De Morgans Love for Kvantorer:

$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$
$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$

Tabel 1.4.2 (S.44)

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in \mathbb{N} : (2x \geq 4 \vee 2x \geq 2^x) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \quad S \quad (x=0) \\ & \exists ! \in \mathbb{N} : (2x < 4 \wedge 2x < 2^x) \quad S \end{aligned}$$

Indlejrede kvantorer (afsnit 1.5)

Åbne udsagn kan have mere end én fri variabel:

Eks:

$$P(x, y) : x + y = 0$$

$P(2, -2)$ er sand

$P(2, 0)$ er falsk

$$\Updownarrow \quad \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : P(x, y) \quad \text{S}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$$

Er sandt, hvis nedestående er muligt:

For hvert $x \in \mathbb{Z}$:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

$$x + y = 0$$

$$\text{Vælg } y = -x$$

D.v.s. y må gerne afhænge af x

Har kvantorenes orden betydning?

$$\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0 \quad \text{F}$$

Er sandt, hvis nedestående er muligt:

Find et $y \in \mathbb{Z}$, så:

Enhvert $x \in \mathbb{Z}$ opfylder:

$$x + y = 0$$

Her skal vi vælge et y , der passer sammen med alle $x \in \mathbb{Z}$.

Generelt: $\exists y : \forall x : Q(x,y) \Rightarrow$
 $\forall x : \exists y : Q(x,y)$

D.v.s. $\exists y : \forall x : Q(x,y)$ er et stærkere udsagn
end $\forall x : \exists y : Q(x,y)$,

ligesom $x > 20$ er et stærkere udsagn end $x > 10$,
fordi $x > 20 \Rightarrow x > 10$ ($x > 20$ siger mere om x
end $x > 10$, d.v.s. $x > 20$ giver mest information).

Eks:

S: mængden af Stud. i dette lokale

H: mængden af hobbies

$P(x,y)$: x har y som hobby

Alle studerende i dette lokale har en hobby

$\forall x \in S : \exists y \in H : P(x,y)$

$\exists y \in H : \forall x \in S : P(x,y)$

Der er en hobby, som alle Stud. i dette lokale har.

Eks (negering):

$\neg (\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x > y)$
 $\Updownarrow$
 $\forall x \in \mathbb{Z} : \neg (\forall y \in \mathbb{Z} : x > y)$
 $\Updownarrow$
 $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$

Ex: (hobbies revisited)

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in S : \exists y \in H : P(x, y) \\ \Leftrightarrow & \exists x \in S : \forall y \in H : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

„Der er en studerende i dette lokale, som ikke har nogen hobby.“

$$\begin{aligned} & \neg \exists y \in H : \forall x \in S : P(x, y) \\ \Leftrightarrow & \forall y \in H : \exists x \in S : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

„Der er ingen hobby, som deles af alle studerende i lokalitet.“

Eks: (ens kvantorer)

Når kvantorerne og deres universer er ens, må man gøre bytte om på rækkefølgen:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{„går op i“} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z} : (2|x \Rightarrow 2|x \cdot y) \end{aligned}$$

(Se Tabel 1.5.1, s. 56)