

Sidste gang:

$\exists, \exists!$

Negering af kvantificerede udsagn:

$$\neg \forall x: P(x) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$$

$$\neg \exists x: P(x) \Leftrightarrow \forall x: \neg P(x)$$

} De Morgans love
for kvantorer
(Tabel 1.4.2)

Indlejrede kvantorer:

$$\neg \exists x: \forall y: P(x, y) \Leftrightarrow \forall x: \exists y: \neg P(x, y)$$

$$\exists x: \forall y: P(x, y) \Rightarrow \forall y: \exists x: P(x, y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: 2|x \Rightarrow 2|x \cdot y \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{Z}: \forall x \in \mathbb{Z}: 2|x \Rightarrow 2|x \cdot y \\ \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathbb{Z}: 2|x \Rightarrow 2|x \cdot y \end{aligned}$$

1 dag:

Afrunding af indlyrede kvantorer

Regler for logiske slutninger

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Bevis-metoder

Direkte bevis

$$(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Kontraposition

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Modstrid

$$\neg p \Rightarrow f \Rightarrow p$$

Bevis-strategier: "Tips & tricks"

Eks : (tre kvantorer)

$$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall z \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad S$$

For hvert $x \in \mathbb{Z}^+$

Vælg et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $z \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

$$\text{Vælg } y = x$$

$$\frac{x}{y} = 1 \leq z$$

Kan man bytte om på de to $\forall$ i dette eks.?

Nej: (og det skyldes det $\exists$, der er imellem dem)

$$\forall z \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ : \forall x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{x}{y} \leq z \quad F$$

For enhver $z \in \mathbb{Z}^+$

Find et $y \in \mathbb{Z}^+$, så

Enhvert $x \in \mathbb{Z}^+$ opfylder

$$\frac{x}{y} \leq z$$

$$x = z \cdot y + 1 \Rightarrow \\ \frac{x}{y} = z + \frac{1}{y} > z$$

Regler for logiske slutninger (afsnit 1.6)

Nogenlunde lige ud ad landevejen.

Læs det igennem, og check, at du forstår det.

Stil gerne spørgsmål!

Eks:

Hvis det regner, bliver vi inde

Det regner

$\therefore$ Vi bliver inde

↑
„Derfor“ / „Altså“

(Konklusion)

Svarer til:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \end{array}$$

Modus ponens
Tabel 1, s. 66

Læs selv resten
af tabellen.

$$\therefore q$$

„Eks 10“ (fjlslutninger).

Hvis du løser alle øvelsesopgaver, består du eksamen
Du bestod eksamen

$\therefore$ Du løste alle øvelsesopgaver $\nexists$.

Svarer til

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \end{array}$$

$\therefore p$ $\nexists$.

p er en tilstrækkelig, men ikke nødvendig betingelse for q .

„Eks 11“ (fjlslutninger):

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \neg q$ $\nexists$.

Eks:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \end{array}$$

Modus tollens

$\therefore \neg p$

Beris-metoder (Afsnit 1.8)

Hovedtyper:

- Direkte beris

Benytt, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

- Kontraposition

Benytt, at $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

- Modstrid

Benytt, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

I de første eks. skal vi bruge flg. def.:

Def. 1.8.1:

Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:

n lige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$

n ulige $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$

• To heltal har samme paritet, hvis begge er lige eller begge er ulige.

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Beris: Direkte beris

Def. 1 $\Updownarrow$ n ulige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 ulige

□

Eks 8: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Kan vi bruge et direkte beris?

Ikke umiddelbart:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \pm \underbrace{\sqrt{2k+1}}_{\text{lige eller ulige??}}$$

Beris: Kontraposition

Viser, at $\neg(n \text{ ulige}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ ulige})$:

Def. 1 $\Updownarrow$ n lige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 lige

□

Eks 1 og 8 tilsammen viser, at

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}: (n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige})}$$

Eks: Der er to i dette lokale, som har fødselsdag
i samme uge

Ben's:

Antag til modstrid, at der ikke er en uge
med to fødselsdage.

Da er der ≤ 52 mennesker i lokalerne. ⚡

□

NB: „to fødselsdage“ betyder
„mindst to fødselsdage“.
(I modsætning til
„præcis to fødselsdage“.)

Ydroligoe „tricks“: (Afsnit 1.9)

Split op

Eks: (delresultater)

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p), \text{ som i Eks 1+8}$$

$$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1) \quad \begin{array}{l} \text{kan bruges i} \\ \text{ops. 1.8.21} \\ \text{til næste uge} \end{array}$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \begin{array}{l} \text{vender vi tilbage til} \\ \text{i næste uge} \end{array}$$

Eks: (flere tilfælde)

$$\text{Påstand: } \forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{NB: } \lfloor \rfloor \text{ rund ned} \\ \quad \lceil \rceil \text{ rund op} \end{array} \right.$$

Bevis: (to direkte beviser)

Tilfælde 1: n ulige

| dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

| dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

□

„Eks 18": Lad $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

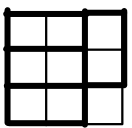
Kan et $n \times n$ skakbræt dækkes af dominobrikker?

Dominobrik: dækker præcis to felter

Ingen brikker må overlappe eller stikke ud over brættet.

Start evt. med simple special-tilfælde for at opnå forståelse:

$n=2$:  Ja

$n=3$:  Nej, vi får brug for en halv brik

n ulige: Nej, fordi:

Hver brik dækker to felter. D.v.s. tilsammen dækker brikkerne et lige # felter

Men ifølge Eks 1 er n^2 ulige

n lige: Ja:

Dæk hver række med $n/2$ brikker

Konstruktiv eksistensbevis:

Vi viser, at der findes en gyldig dækning af brættet ved at beskrive en konkret dækning.

Eks: Har $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ et nulpunkt?

Ja, fordi $f(0) = -1 < 0$ og
 $f(2) = 16 - 4 - 1 = 11 > 0$

Ikke-konstruktiv eksistensbevis:

Vi har ikke fundet 0-punktet, men vi har bevist, at det eksisterer.

Eksisterer der en unik løsning til $f(x) = 0$?

Nej, der er også et nulpunkt nl. -2 og 0 .

Lidt sjovere eksempel: Eks 12

Tilbage til skatbræt, domindbrikker og "tricks"...

Eks: $n \times n$ skakbræt

Fjern to modstående hjørner.

Kan brættet dækkes af domino-brikker?

n ulige: Nej, da $n-2$ ulige

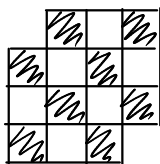
n lige: Først simple specieltilfælde:

$n=2$:



Nej

$n=4$:



Nej

Generelt:

Antag til modstrid, at brættet kan dækkes af dominobrikker.

Da har brættet lige mange sorte og hvide felter.

Men vi startede med et bræt, hvor hver række havde lige mange sorte og hvide felter, og fjernede to sorte eller to hvide felter. D.v.s. der er ikke lige mange sorte og hvide felter ↴

Uden at tegne brættet havde vi måske ikke tænkt over, at de to manglende felter har samme farve.