

Sidste gang:

Beispielmotoder

- Direkte beweis

Demonstration

- Direkte beweis

$$\begin{array}{c}
 n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \\
 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \\
 \downarrow \\
 (p \Rightarrow p_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}
 \end{array}$$

n er ulige
 $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$
 n^2 er ulige
 n ulige
 n^2 ulige

- Kontrapositionsbeweis

Kontrapositionsbeweis

$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow$

$p \Rightarrow q$

n^2 ulige n ulige

n lige n^2 lige

- Modstridsbevis

• Modstridsbevis

$(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

Ingen uge med 2 fødselsdage

Højest 52 i lokalitet

Mindst 2 med fødselsdag i samme uge

„Tricks“ : Split op i delresultater

Se først på simple specieltilfælde

• • •

1 dag:

Induktionsbeweiser

Induktion

(Afsnit 5.1)

I denne uge i DMS34 kommer datalogerne til at se, hvordan induktion bruges til at bevise korrekthed af algoritmer. Både dataloger og SE-ingeniører kommer til at se det i foråret.

Først lidt repetition af potensregningsregler:

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^2 = 16$$

$$2^5 = 2^2 \cdot 2^3 = 32$$

Generelt: $2^k \cdot 2^l = 2^{k+l}$

Induktionsbeviser bruges til at bevise parametriserede udsagn:

Eks:
$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, \text{ for alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\Updownarrow \forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n}_{P(n)} = 2^{n+1} - 1$$

$$P(0): \underbrace{2^0}_{=1} = \underbrace{2^1-1}_{2-1=1} \quad \text{---} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{matrix}} \right\} \text{Basis-tilfælde}$$

$$P(1): \underbrace{2^0+2^1}_{1+2=3} = \underbrace{2^2-1}_{4-1=3} \quad \text{---}$$

$$P(2): \underbrace{2^0+2^1+2^2}_{1+2+4=7} = \underbrace{2^3-1}_{8-1=7} \quad \text{---}$$

$$\underbrace{2^3-1}_{\text{ifølge } P(2)}$$

$$P(3): \underbrace{2^0+2^1+2^2+2^3}_{2^3-1+2^3} = 2^4-1 \quad \text{---}$$

$$2^3-1+2^3 = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2^4 - 1$$

Mere generelt: $\overbrace{P(k-1) \text{ Induktions-antagelse}}^{2^0+2^1+\dots+2^{k-1} = 2^k-1}$
 Hvis vi ved, at $2^0+2^1+\dots+2^{k-1} = 2^k-1$,
 kan vi udlede følgende:

$$\begin{array}{lcl}
 \underline{2^0+2^1+\dots+2^{k-1}+2^k} & = & 2^k-1+2^k \\
 & = & 2 \cdot 2^k - 1 \\
 & = & \underline{2^{k+1} - 1}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 2^0+2^1+\dots+2^{k-1}+2^k \\ 2^k-1+2^k \\ 2 \cdot 2^k - 1 \end{matrix}} \right\} \text{Induktions-} \\
 \text{P(k)} \quad \swarrow \quad \searrow \quad \text{skridt}$$

Basistilfælde: Bevis $P(0)$

Ind. skridt: Bevis $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : \underbrace{P(k-1)}_{\text{Ind. ant.}} \Rightarrow P(k)$

$$\begin{aligned} & P(0) \\ k=1: & P(0) \Rightarrow P(1) \\ k=2: & P(1) \Rightarrow P(2) \\ k=3: & P(2) \Rightarrow P(3) \\ & \vdots \end{aligned}$$

„Domino-effekt“:

$$P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \dots$$

Bevis ved induktion over n .

Basis: ($n=0$)

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

$P(0)$

Ind. ant: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$

$P(k-1)$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} & 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \\ \Downarrow & \\ & 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k \\ & = 2 \cdot 2^k - 1 \\ & = 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

$P(k-1)$

$\Downarrow$

$P(k)$

□

Bevis $\forall n \geq m: P(n)$ o.h.a. (simpel) induktion over n :

Basis: Bevis $P(m)$

Induktionsstrid: Bevis, at $\underbrace{P(k) \Rightarrow P(k+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}$, for alle $n \geq m$.

Eller bevis, at $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, for alle $n \geq m+1$
Eller ...

O.v.s. vi beviser:

$$P(m)$$

$$P(m) \Rightarrow P(m+1)$$

$$P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$$

$\vdots$

$$k=m \quad (\text{eller } k=m+1)$$

$$k=m+1 \quad (\text{eller } k=m+2)$$

Eks:

Prøv selv at bevise, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for alle } n \geq 1.$$

$$\text{D.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for alle } n \geq 1$$

Bevis: Ved induktion over n

Basis: ($n=1$)

$$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\text{Ind. ant: } 1+2+\dots+k-1 = \frac{(k-1)k}{2}$$

Ind. skridt: For $k \geq 2$ gælder:

$$\begin{aligned} \Downarrow \quad 1+2+\dots+k-1 &= \frac{(k-1)k}{2} && (\text{ind. ant.}) \\ \underline{1+2+\dots+k-1+k} &= \frac{(k-1)k}{2} + k \\ &= \frac{(k-1)k + 2k}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{(k+1)k}{2}}} \end{aligned}$$

□

Äquivalent basis:

Basis: $(n=1)$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Ind. anl.:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gäller:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{ind. anl})$$

$\Downarrow$

$$1+2+\dots+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

□

Eks:

$$2^n < n!, \text{ for } n \geq 4$$

Lad os starte med at se på små n -værdier.
Lidt ligesom sidste forelæsning, hvor vi så på
simple special-tilfælde for at få en fornemmelse af,
hvad der foregår:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_8 < \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{24} = 4!$$

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2 \cdot 8 = 16} < \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5 \cdot 24 = 120} = 5!$$

$$2^6 = 2 \cdot 16 < 6 \cdot 120 = 6!$$

Vi ganger hele tiden 2 på venstre-siden og
større og større tal på højre-siden.

D.v.s. når n vokser, bliver uligheden "mere og
mere sand".

Næste gang skriver vi dette op som induktionsbevis.