

Sidste gang:

Bevis $\forall n \geq m: P(n)$ o.h.a. (simpel) induktion over n :

Basis: Bevis $P(m)$

Induktionsstredt: Bevis $\forall k \geq m: P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Induktionsantagelse

Eller bevis, at $P(k-1) \Rightarrow P(k)$, for alle $n \geq m+1$

Eller ...

O.v.s. vi beviser:

$$P(m)$$

$$P(m) \Rightarrow P(m+1)$$

$$P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$$

$\vdots$

$$k=m \quad (\text{eller } k=m+1)$$

$$k=m+1 \quad (\text{eller } k=m+2)$$

Eks: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for alle } n \geq 1.$

Bevis ved induktion over n :

Basis ($n=1$): $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+k &= \frac{k(k+1)}{2} && (\text{ind. ant}) \\ \Downarrow \\ 1+2+\dots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Beviset kunne også formuleres sådan:

Basis ($n=1$): $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Ind. ant.:

$$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ind. skridt: For $k \geq 1$ gælder:

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+k+k+1 &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1, \text{ ifølge ind. ant.} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Eks 5.1.6: $2^n < n!$, for $n \geq 4$

Lad os starte med at se på små n -værdier.
Lidt ligesom sidste forelæsning, hvor vi så på
simple special-tilfælde for at få en fornemmelse af,
hvad der foregår:

$$2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_8 < \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{24} = 4!$$

$$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2 \cdot 8 = 16} < \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5 \cdot 24 = 120} = 5!$$

$$2^6 = 2 \cdot 16 < 6 \cdot 120 = 6!$$

Vi ganger hele tiden 2 på venstre-siden og
større og større tal på højre-siden.
D.v.s. når n vokser, bliver uligheden "mere og
mere sand".

Basis ved induktion over n :

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Ind. ant.: $2^{k-1} < (k-1)!$

Ind. skridt: For $k \geq 5$ gælder:

$$\Downarrow 2^{k-1} < (k-1)!$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{k-1} < k \cdot (k-1)!, \text{ da } 2 < k$$

$$\Updownarrow 2^k < k!$$

Påstand: Alle æbler har samme farve

"Ben's": Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.:

I enhver skål med $n-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $n \geq 3$

Stil æblerne op på række:



De første $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

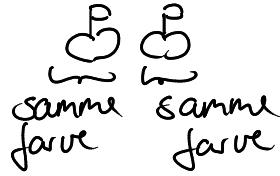
De sidste $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $n-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle n æbler samme farve.

□

Bemærk: Argumentet i indskridtet fungerer ikke for $n=2$:



D.v.s. vi har vist:

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$

Da $P(2)$ er falsk, har vi ikke meget glæde af at vide, at $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

Mængder:

Afsnit 2.1-2.2

Def. 2.1.1

En **mængde** er en uordnet samling af objekter, kaldet **elementer** eller **medlemmer**

Eks:

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 1, 1, 2, 3\} \\ V &= \{a, e, i, o, u, y\} && \text{opremsning (enumeration)} \\ \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} && \text{uendelig opremsning} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ L &= \{0, 2, 4, 6, \dots\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\} && \begin{array}{l} \text{mængde-bygger-notation} \\ \text{(set builder notation)} \end{array} \\ &\quad \begin{array}{l} \nearrow \text{„hvordan} \\ \text{der gælder“} \\ \nwarrow \text{„går op i“} \end{array} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\} \\ &= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Mængde-bygger-notation: $\{ \langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle \}$

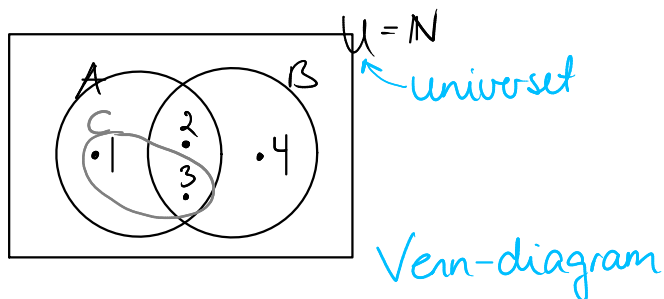
$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (\text{positive rationale tal})$$

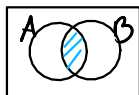
$|S|$: kardinalitet af S ("størrelsen" af S)
elementer i S , hvis S er endelig
Det + Mat vendt tilbage til kardinalitet af
uendelige mængder

Eks: $|\{1,2\}| = 2 = |\{1,2,2\}|$
 $|\{1,2,4,8,16\}| = 5$

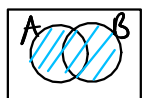
Eks:



$A \cap B = \{2, 3\}$
"fælles med"
fællesmængde / snitmængde (intersection)



$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
"forent med"
foreningsmængde (union)



Bemærk:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}, \text{ men}$$

$$\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}, \quad |\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}| = 2$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

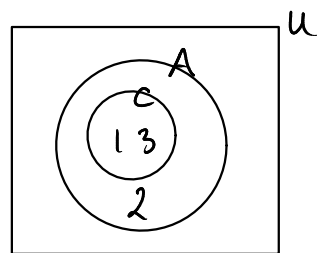
$$C \subseteq A$$

Delmængde (subset)

$$S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow \forall x \in U: (x \in S_1 \Rightarrow x \in S_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in S_1: x \in S_2$$

"er en delmængde af"
"er indeholdt i"



$$C \subseteq A$$

$\emptyset = \{\}$ Den tomme mængde

Bemærk: (Sætning 2.1.1)

- $C \subseteq C$, fordi

$$\forall x \in C: x \in C$$

- $\emptyset \subseteq C$, fordi

$$\forall x \in \emptyset: x \in C \quad \text{eller}$$

$$\forall x \in U: (x \in \emptyset \Rightarrow x \in C)$$

F
S

Agte delmængde (proper subset)

$$C \subset A \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \neq A$$

Eks:

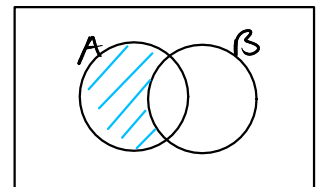
$$\emptyset \subset C$$

$$C \subset A$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

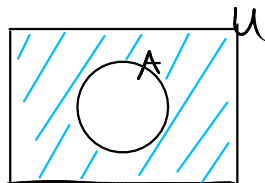
$$A \setminus B = A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

"fraregnet" (difference)

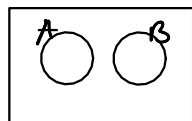


Komplement af A:

$$\bar{A} = U - A$$



A og B er *disjunkte* (disjoint)
 $\Updownarrow$ $A \cap B = \emptyset$
 $\Updownarrow$ $A - B = A$
 $\Updownarrow$ $A \subseteq \bar{B}$



"Mængde-love":

Tabel 2.2.1 (s. 132)

$\cup$

$\cap$

$\sim$

$\sim$

$\sim$

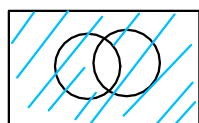
Tabel 1.3.6 (s. 25)

$\vee$

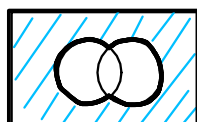
$\wedge$

De Morgans Love:

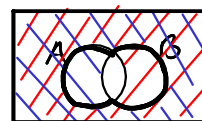
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$\square$: $\overline{A \cup B}$



$\square$: $\bar{A}$ $\square$: $\bar{B}$

$\square$: $\bar{A} \cap \bar{B}$

Bogen viser love fra Tabel 2.2.1 u.h.a. omskrivninger
 af def. af de enkelte mængde-operationer og u.h.a.
 tilhørs-tabeller (membership tables), men det er som
 regel nemmest at bruge Venn-diagrammer (som ovenfor).