

Sidste gang:

Induktion:

Bevis for $\forall n \geq 4: 2^n < n!$

„Bevis“ for, at alle æbler har samme farve
 $P(1)$ og $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

Mængder:

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 2, 3, 1, 3\}$$

Kardinalitet

$$|\{1, 2, 3\}| = |\{2, 2, 3, 1, 3\}| = 3$$

Mængde-bygger-notation

$$\{n \mid \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1\} = \\ \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

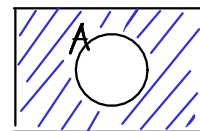
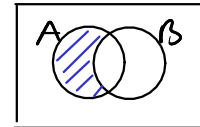
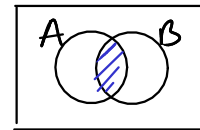
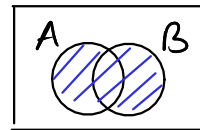
Operationer på mængder:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



De Morgan:

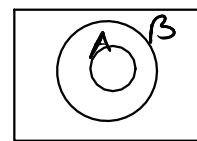
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

A og B er disjunkte, hvis $A \cap B = \emptyset$

Delmængde:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A: x \in B$$



Ægte delmængde:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

For enhver mængde A gælder

$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

1 dag:

Mængder, afsnit 2.1-2.2

Funktioner, afsnit 2.3

Potensmenge (power set)

$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}$$

Ex:

$$S = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 1 = 2^0$$

$$S = \{1\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2 = 2^1$$

$$S = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 4 = 2^2$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 8 = 2^3$$

$$S' = \{1, 2\}$$

$$S = \{1, 2, 3\}, \text{ d.h. } x=3$$

Eks 5.1.10: En mængde S med n elementer har 2^n delmængder, for alle $n \geq 0$

D.v.s.

$$|S| = n \Rightarrow$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

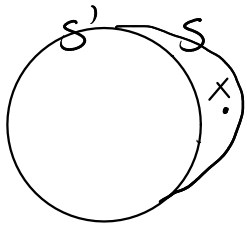
$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

Ind. skridt: $n \geq 1$

Enhver mængde med n elementer kan dannes ved at tage en mængde med $n-1$ elementer og tilføje et element.

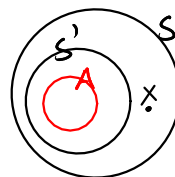


$$|S'| = n-1, \quad S = S' \cup \{x\}$$

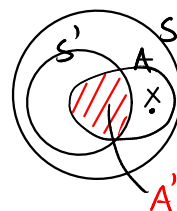
S' har 2^{n-1} delmængder ifølge ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



I alt $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ muligheder

□

Kartesiske produkt

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

Eks: $A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Lidt notation:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

(lige gyldigt, hvordan
man sætter parenteser)

Bemærk ligheder med

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

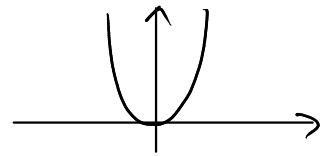
Funktioner (afsnit 2.3)

Def. 1+2:

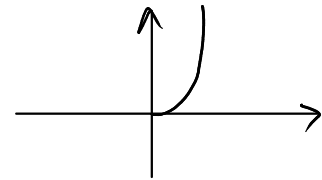
$$f: A \rightarrow B$$

definitions mængde (domain) $D_m(f)$ sekundær mængde (codomain)

Eks: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

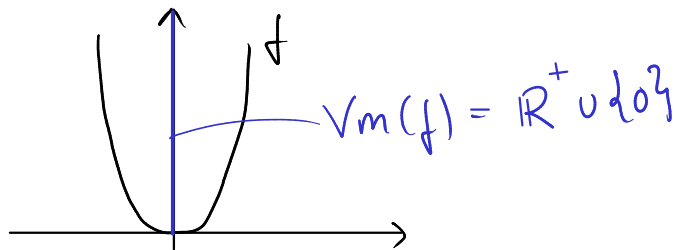


Eks: $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 $g(x) = x^2$



Værdimængde / billed mængde (image / range)

$$f: A \rightarrow B$$
$$Vm(f) = f(A)$$
$$= \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$$



f er ikke injektiv (en-til-en). (Def. 5)

Eks: $f(-1) = f(1)$

f er ikke surjektiv (på), (Def. 7)

da $\forall m(f) \neq \mathbb{R}$

← f 's sekundærmængde

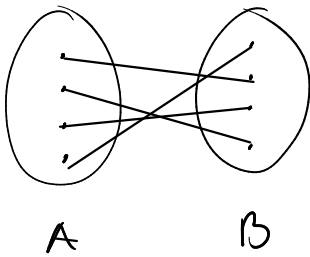
g er både injektiv og surjektiv.

D.v.s. g er bijektiv.

Def. 8:

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv



$$f: A \rightarrow B$$

$$\forall y \in B: \exists ! x \in A: f(x) = y.$$

Altså:

sekundærmængde

def.mængde

Injektiv: Hver y -værdi „rammes“ af højest en x -værdi

Surjektiv: Hver y -værdi „rammes“ af mindst en x -værdi

Bijektiv: Hver y -værdi „rammes“ af præcis en x -værdi.

D.v.s. g er bijektiv, men f er ikke.

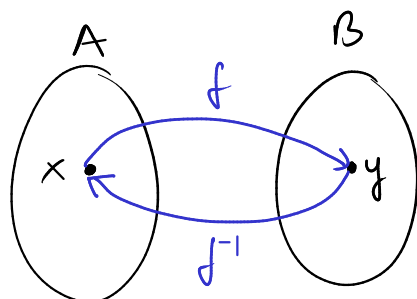
Hvis en funktion er bijektiv, er den også invertibel.

D.v.s. den har en invers:

Def. 9:

Lad $f: A \rightarrow B$ være en bijektion.

Den inverse funktion til f er funktionen $f^{-1}: B \rightarrow A$, som opfylder $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, for alle $x \in A$.



$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ f^{-1}(y) &= x \end{aligned}$$

D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = x$, for alle $x \in A$,
og $f(f^{-1}(y)) = y$, for alle $y \in B$.

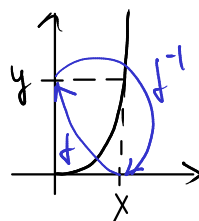
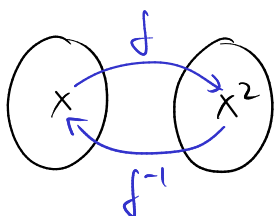
Eks:

$$g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad g(x) = x^2$$

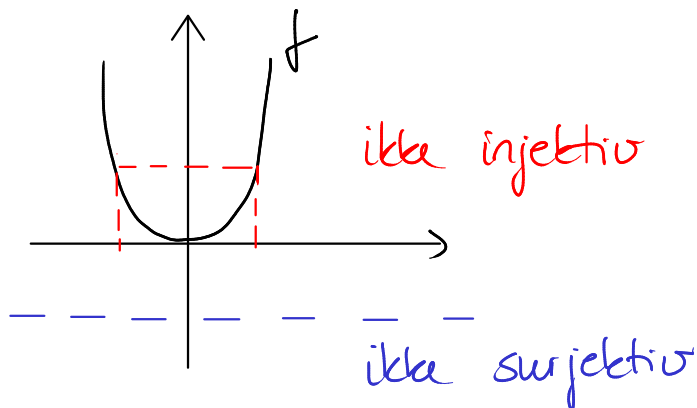
$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

D.v.s.:

$$g^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x} :$$



Eks: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
 f er ikke invertibel.



Eks: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x+1$

$$y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

D.v.s. $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Check: $h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x$.

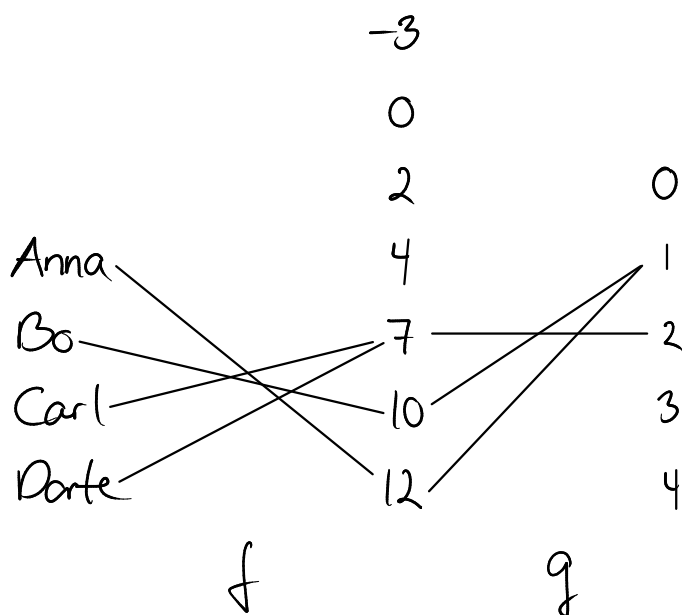
Man kan kombinere funktioner (se SoWiSo/lærebogen Def 10):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad (\text{sammensat funktion})$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Eks: f : navn $\rightarrow$ karakter
 g : karakter $\rightarrow$ antal



Hvor mange fik
samme karakter
som Dorte?

$$(g \circ f)(\text{Dorte}) =$$
$$g(f(\text{Dorte})) =$$
$$g(12) = 1$$

Bemærk:

$f \circ g$ er ikke def.
($\text{Dom}(f) \neq \text{Vm}(g)$).

Funktioner kan være (se SoWiSo / lærebogen Def. 6)

(strengt) voksende

(strengt) aftagende

monoton