

Sidste gang:

Mængder

Potensmængde $\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$$

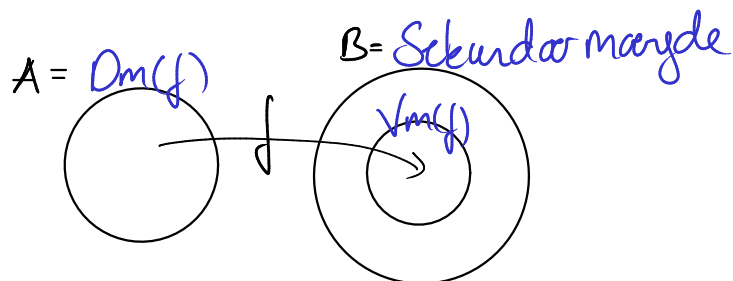
Induktionsbevis: Hver gang vi tilføjer et nyt element til en mængde, får den dobbelt så mange delmængder, fordi det nye element kan tilføjes til hver af de oprindelige delmængder.

D.v.s.:

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^{n-1} \Rightarrow$$

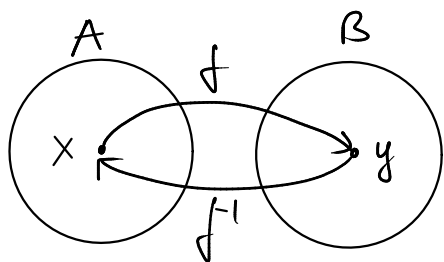
$$|\mathcal{P}(S \cup \{x\})| = \underset{\substack{\uparrow \\ \# \text{ delmængder} \\ \text{uden } x}}{2^{n-1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \# \text{ delmængder} \\ \text{med } x}}{2^{n-1}} = 2^n, \text{ for ethvert } x \in U - S$$

Funktioner



- $f: A \rightarrow B$ er
- **injektiv** (en-til-en), hvis
hvert element i B „rammes“ ≤ 1 gang
 - **surjektiv** (på), hvis
hvert element i B „rammes“ ≥ 1 gang,
d.v.s. $B = \text{Vm}(f)$
 - **bijektiv** (en en-til-en-korrespondance), hvis
hvert element i B „rammes“ præcis 1 gang,
d.v.s. hvis f er både injektiv og surjektiv.

En funktion har en **invers**, hvis og kun hvis den er bijektiv.



Eks: $g(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2$
 $g^{-1}(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$
 $h(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x+1$
 $h^{-1}(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Eks: $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

(strengt) **voksende**

(strengt) **aftagende**

monoton: enten voksende eller aftagende

1 dag:

Stærk induktion

Rekursive definitioner

Et eks. mere med stærk induktion

Struktural induktion

Stærk induktion

(Afsnit 5.2)

Eks: Alle heltal $n \geq 4$ kan skrives som
en sum af 2-taller og 5-taller

D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : \underbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\begin{array}{rcl} n=4 & = & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ n=5 & = & 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ n=6 & = & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \\ n=7 & = & 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ n=8 & = & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 \\ & & \vdots \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \text{(+1)} \\ \text{(+1)} \\ \text{(+1)} \end{array} \right\} \text{Basis}$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$$

More general formulering of induktionsprincippet:

Bevis $P(n)$, $n \geq k$, o.h.a. stærk induktion:

- Bevis $P(k), P(k+1), \dots, P(l)$, $l \geq k$ (Basis)
- Bevis $(P(k) \wedge \dots \wedge P(n-1)) \Rightarrow P(n)$, $n \geq l+1$ (Induktions-
skridt)

Induktionsantagelse

(eller bevis $(P(k) \wedge \dots \wedge P(n)) \Rightarrow P(n+1)$, $n \geq l$)

Eks overfor: $k=4$, $l=5$

Simpel induktion

$P(k)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

$P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$

$\vdots$

Stærk induktion (med $k=l$)

$P(k)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

$P(k) \wedge P(k+1) \wedge P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$

$\vdots$

Ind. ant.

$$\overbrace{\forall k \in \{4, 5, \dots, n-1\} : \exists a, b \in \mathbb{N} : k = 2a + 5b}^{P(k)}$$

Hvis $n \geq 6$, er $n-2 \geq 4$. D.v.s. $n-2 \in \{4, 5, \dots, n-1\}$.

D.v.s.

$$\overbrace{\exists a, b \in \mathbb{N} : n-2 = 2a + 5b}^{P(n-2)}, \text{ hvis } n \geq 6$$

Ind. skridt: $n \geq 6$

$$n = \underbrace{(n-2)}_{\geq 4} + 2$$

$$= (2a + 5b) + 2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N} \quad (\text{ifølge ind. ant.})$$

$$= \underbrace{2(a+1)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{5b}_{\in \mathbb{N}}$$

□

Bemærk, at vi har brug for både $n=4$ og $n=5$ i basis.
Hvis vi kun har $n=4$, beviser vi kun udsagnet for n lige.

Vi har vist:

- $P(4)$
- $P(5)$
- $P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$
- $P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$
- $\vdots$

Rekursive definitioner (Afsnit 5.3)

Eks:

Fibonacci-tallene

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{array} \right\} \text{Basis-skridt}$$
$$\left. f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \right\} \text{Rekursivt skridt}$$

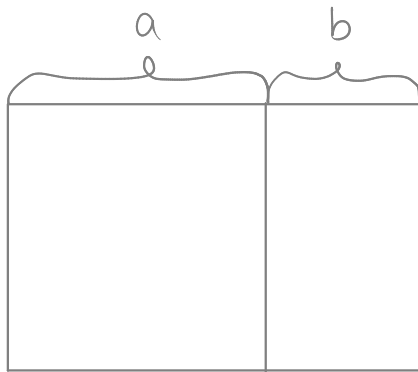
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Vokser eksponentielt:

Eks. 5.3.4: $f_n > \varphi^{n-2}, \quad n \geq 3$, hvor

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad (\text{Golden ratio})$$

Gyldne snit:



$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a} &= \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} &= \varphi \end{aligned}$$

φ har mange interessante egenskaber.
En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi \quad (*) \end{aligned}$$

Basis {

- $f_3 = 2$
 $\varphi^{3-2} = \varphi \approx 1,618 < f_3$ - OK!
- $f_4 = 3$
 $\varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1 + \varphi \approx 2,618 < f_4$ - OK!
- $f_5 = f_4 + f_3$
 $> \varphi^2 + \varphi$ (beist overfor)
 $= \varphi(\varphi + 1)$
 $= \varphi \cdot \varphi^2$, iflg. (*)
 $= \varphi^3$

Induktionsantagelse:

$$f_k > \varphi^{k-2}, \quad 3 \leq k \leq n-1$$

D.v.s.

$$f_{n-1} > \varphi^{n-3} \text{ og } f_{n-2} > \varphi^{n-4}, \text{ hvis } n \geq 5$$

Induktionsskridt: $n \geq 5$

$$\begin{aligned}
 f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\
 &> \varphi^{n-3} + \varphi^{n-4}, \text{ iflg. ind. ant.} \\
 &= \varphi^{n-4}(\varphi + 1) \\
 &= \varphi^{n-4} \cdot \varphi^2, \text{ iflg. (*)} \\
 &= \varphi^{n-2}
 \end{aligned}$$

Herved har vi beist uligheden fra Eks. 5.3.4
 v.h.a. stærk induktion. □

Hvis vi lader $P(n)$ være udsagnet $\int_n > \varphi^{n-2}$, så er
beviset overfor til at bevise:

$$P(3)$$

$$P(4)$$

$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

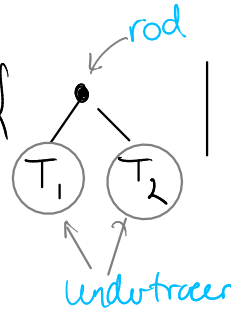
$$P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$\vdots$

Def. 5.3.5: Fulde binære træer

Basis-skridt : $S_0 = \{\bullet\}$

Rek. skridt : $S_n = S_{n-1} \cup \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \mid T_1, T_2 \in S_{n-1} \right\}, n \geq 1$



D.v.s.

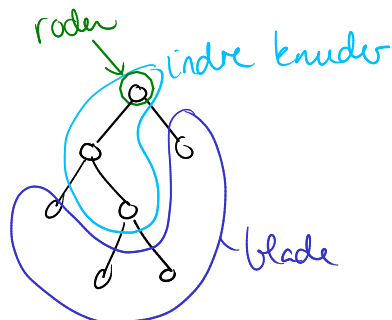
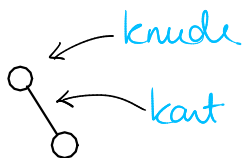
$$S_1 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_2 = \{\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}\}$$

$$S_3 = \left\{ \text{---}, \text{---}, \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}, \dots \right\}$$

($|S_3| = 26$)

Lidt terminologi:



indre knuder har to børn hver
blade har ingen børn

Struktural induktion

Bevis $P(S_n)$, $n \geq 0$, ved struktural induktion:

- Bevis $P(S_0)$
- Bevis, at $P(S_{n-1}) \Rightarrow P(S_n)$ for alle $n \geq 1$

Påstand: For ethvert fuldt binært træ T med $b(T)$ blade og $i(T)$ indre knuder gælder $b(T) = i(T) + 1$

Basis: Ved strukturel induktion.

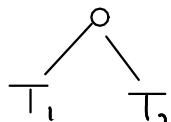
Basis: $S_0 = \{\bullet\}$

$$i(T) = 0$$

$$b(T) = 1 = i(T) + 1$$

Ind. ant: $b(T) = i(T) + 1$, for alle $T \in S_{n-1}$

Ind. skridt: S_n , $n \geq 1$

 $\in S_n \Rightarrow T_1, T_2 \in S_{n-1}$
 $\Rightarrow$ roden er en indre knude

D.v.s.

$$i(T) = i(T_1) + i(T_2) + 1 \quad \text{og}$$

$$b(T) = b(T_1) + b(T_2)$$

$$= \overbrace{i(T_1) + 1}^{b(T_1)} + \overbrace{i(T_2) + 1}^{b(T_2)}, \quad \text{ifølge ind. ant.}$$

$= i(T)$

$$= i(T) + 1$$

□