

## Følger & rækker (afsnit 2.4)

Følge: (Sequence/progression)

Ordnet mængde/

Funktion fra (delmængde af)  $\mathbb{N}$

Eks:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  (uendelig følge)

$$f(n): \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+, \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad (n\text{'te led})$$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad (\text{helt sekvens})$$

↑ konflikt med mængdenotation

Eks: Fibonacci-tallene (uendelig følge)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 2$$

ingen dør  
hvert par, som var der allerede for to måneder siden, får et par unger.

Modellerer #kaniner på en ø:

- Et par sættes på øen ved starten af første måned
- Fra et par er to måneder, får de et par unger hver måned
- Ingen kaniner dør

Eks:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  (uendelig følge)

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eller rekursiv def:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1$$

Eks:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$  (endelig følge)

Eks på:

Geometrisk følge:

$$a, ar, ar^2, \dots$$

$$a_n = ar^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled

følles faktor

Eksempel fra før:  $a=1, r=\frac{1}{2}$

Aritmetrisk følge:

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

$$a_n = a + nd, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled

følles forskel

Eks:  $1, 3, 5, 7, \dots$

$$a=1, d=2$$

Eks: Mandibrot - følge

Defineret for hvert  $c \in \mathbb{C}$ :

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1}^2 + c, \quad n \geq 1$$

$c$  tilhører Mandibrot-mængden,  
hvis  $\{x_n\}$  er begrænset

$i$  tilhører Mandibrot-mængden:

$$x_1 = 0^2 + i = i$$

$$x_2 = i^2 + i = i - 1$$

$$x_3 = (i-1)^2 + i = -1 + 1 - 2i + i = -i$$

$$x_4 = (-i)^2 + i = i - 1 = \underline{x_2}$$

$$x_5 = x_3$$

$$x_6 = x_4 = x_2$$

$\vdots$

D.v.s.

$\{x_n\}$  er begrænset

Escape condition:  $|x_n| > 2$

Jo hurtigere escape, jo lysere farve.

Man kan også lægge ledene i en følge sammen:

## Række (summation/series):

Sum af et (endeligt eller) uendeligt # led.

Eks:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

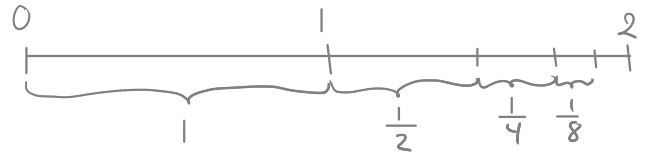
Geometrisk række:  $\sum_{i=0}^n ar^i$

$a=1, r=\frac{1}{2}$

$n=1: 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$n=2: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$

$n=3: 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$



$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$$

Mer generelt:

Tabel 2, linie 1:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{for } r \neq 1 \quad (= n+1, \text{ for } r=1)$$

D.U.S.

$$\sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Illustration: (binære tal)

$$\begin{array}{r} i=0 \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \\ \hline \end{array} = 10000 - 1$$

r=3:

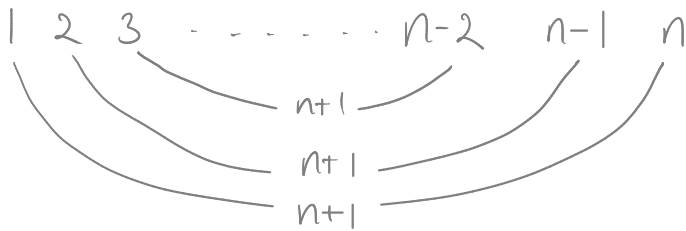
Ternære tal:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3^0: \\ 2 \cdot 3^1: \\ 2 \cdot 3^2: \\ 2 \cdot 3^3: \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 20 \\ 200 \\ 2000 \\ \hline \end{array} = 10000 - 1$$

## Aritmetrisk række:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (a+id) &= (n+1)a + d \sum_{i=0}^n i \\ &= (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Tabel 2, s. 166  
2. linie



Beviset tidligere i  
kurset v.h.a. induktion

n lige:

$\frac{n}{2}$  par med sum  $n+1$

n ulige:

$\frac{n-1}{2}$  par med sum  $n+1$

Midtvorte tal:  $\frac{n+1}{2}$

alt:  $(n-1) \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Eks:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n+1 &= \sum_{i=0}^n (1+2i) \\ &= (n+1) \cdot 1 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n+1 + n(n+1) \\ &= (n+1)(n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1\end{aligned}$$

Summer dukker f.eks. op, når vi skal beregne #gennemløb af et loop (for at analysere køretid af en algoritme):

for  $i := 1$  to 10

for  $j := 1$  to 20

...

$$\# \text{gennemløb} = 10 \cdot 20 \left( = \sum_{i=1}^{10} 20 \right) = 200$$

for  $i := 1$  to 10

for  $j := 1$  to  $i$

...

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

for  $i := 5$  to 10

for  $j := 1$  to  $i$

...

$$\begin{aligned} \# \text{gennemløb} &= \sum_{i=5}^{10} i = \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^4 i = 55 - \frac{4 \cdot 5}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

For  $i:=1$  to 3

For  $j:=1$  to  $i$

For  $k:=1$  to  $j$

...

$$\# \text{ gemidd } = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^3 \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{i^2 + i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i$$

Table 2,  $\text{line } 2 \text{ of } 3$   $\rightarrow$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \right) + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$= 7 + 3 = 10$$

Notation:

$$\sum_{i=1}^5 i = \sum_{1 \leq i \leq 5} i = \sum_{i \in A} i, \text{ waar } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Eks:  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n$   
 (n'te harmoniske tal)

↑ Hvorfor?  
 (Svaret kommer i læsestoffet til næste gang)

Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pebber med 1 klistermærke hver  
 n forskellige klistermærker

For at få et af hver slags skal man i gennemsnit  
 købe  $nH_n$  pakker:

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + 1$$