

## Relationer (afsnit 9.1)

Bestriver en sammenhæng mellem elementer i en eller flere mængder. Bruges f.eks. i database.

### Eks:

(studie-nr, navn, adresse, uddannelse) kvartær rel.

(studie-nr, kursus) binær relation

$<, =, |$ , „er barn af“ binære relationer

Def. 1: Lad  $A$  og  $B$  være mængder.

En binær relation fra  $A$  til  $B$  er en delmængde af  $A \times B$ .

Eks. angiver:

$A$ : mængde af studie-nr.,  $B$ : mængde af kurser  
eller

$$A = B = \mathbb{Z}$$

eller...

1 dag:

- Eks
- Rep. (afsnit 9.3)
  - Mængde-bygger-notation, opsamling
  - Matricer
  - Grafer
- Egenskaber
  - Refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk, transitiv
- Lukninger (afsnit 9.4)

Eks: Relation fra  $\mathbb{Z}^+$  til  $\mathbb{R}^+$

$$R_{inv} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \right\}$$
$$= \left\{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \right\}$$

NB:  $(2, \frac{1}{2}) \in R_{inv}$ , men  
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{inv}$

$(a, b) \in R$  skrives også

$a R b$  og læses

"a er relateret til b gennem R"

← rækkefølgen har betydning  
(medmindre R er symmetrisk)

$(a, b) \notin R$  skrives også

$a \not R b$

Eks:  $5 R_{inv} \frac{1}{5}$ , men  $6 \not R_{inv} \frac{1}{5}$  og  $\frac{1}{5} \not R_{inv} 5$

Eks:  $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid a < b \}$   
 $= \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,4), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner (hvorfor?)

Eks:  $R_{abs} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$   
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = b \vee a = -b \}$   
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 2: Lad  $A$  være en mængde  
 En relation på  $A$  er en relation fra  $A$  til  $A$ ,  
 d.v.s. en delmængde af  $A \times A$ .

(Fra nu af kun denne slags relationer)

Eks:  $R_<$  er en relation på  $\mathbb{Z}^+$ .  
 $R_{abs}$  er en relation på  $\mathbb{Z}$ .

## Repræsentation af relationer (afsnit 9.3)

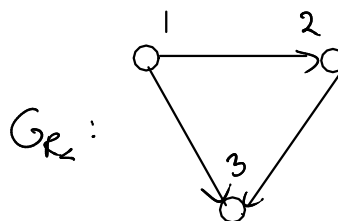
Man kan repr. rel. v.h.a.

- Opremsning
- Mængde-byggeset notation
- Matrix (Hvis  $A, B$  endelige)
- Orienterede grafer (Hvis  $A=B$  og  $A$  endelig)  
(digraphs)

Eks:  $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eks:  $R_{\equiv}$  relation på  $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_{\equiv} = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{2}\}$$

$$= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Egenskaber (afsnit 9.1)

Def. 3:  $R$ : relation på  $A$

$R$  er refleksiv, hvis

$(a, a) \in R$  for alle  $a \in A$

Eks:

$\checkmark$ :  $R_{\leq}$ ,  $R_{abs}$ ,  $R_{\equiv}$ ,  $R_{=}$ ,  $R_{\text{I}}$  "går op i"

$\times$ :  $R_{<}$ ,  $R_{\neq}$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?  
graf-

## Lukninger (afsnit 9.4)

$R$ : relation på  $A$ .

Den refleksive lukning af  $R$  er

$$r(R) = R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

D.v.s. den refleksive lukning skabes ved at tilføje præcis de elementer, der mangler for, at  $R$  er refleksiv.

Eks:

$$\begin{aligned} r(R_<) &= \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \mid a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a < b \vee a = b\} \\ &= \{(a,b) \mid a \leq b\} \\ &= R_{\leq} \end{aligned}$$

Eks:

$$R = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3)\} \text{ på } \{1,2,3,4\}$$
$$r(R) = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,4)\}$$

Mere generelt:

$R$ : relation

$P$ : egenskab

Lukningen af  $R$  m.h.t.  $P$  er den mindste mængde  $R'$ , som opfylder

- $R \subseteq R'$
- $R'$  har egenskaben  $P$

Def. 4:  $R$ : relation på  $A$ .

$R$  er symmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad \text{for alle } a,b \in R$$

Eks:

$$\checkmark: R_{=}, R_{\neq}, R_{\text{abs}}, R_{\neq}$$

$$\times: R_{<}, R_{\leq}, R_{|}, R$$

Den symmetriske lukning af  $R$  er

$$S(R) = R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Eks: Symmetrisk lukning af

$$- R_{<}: R_{<} \cup R_{>} = R_{\neq}$$

$$- R_{\leq}: R_{\leq} \cup R_{>} = A \times A$$

$$- R_{=}: R_{=}$$

$$- R: R \cup \{(3,2)\} = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

### Def. 4:

$R$  er antisymmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R, \text{ for alle } a,b \in A$$

### Eks:

Anti-symmetrisk:  $R_<, R_{\leq}, R_=>$

Symmetrisk:  $R_{\equiv}, R_=\rangle$

Ingen af delene:  $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$

Antisymmetrisk løsning findes ikke.

For at gøre en ikke-antisymmetrisk relation antisymmetrisk skal man fjerne elementer.

Def. 5:  $R$  relation på  $A$

$R$  er transitiv, hvis

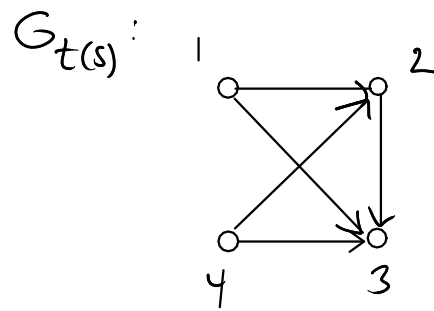
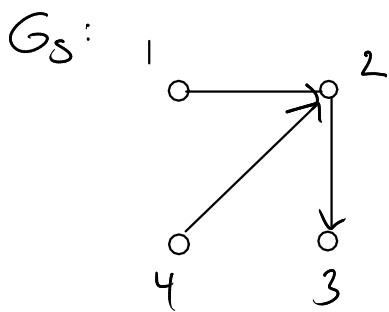
$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \text{ for alle } a,b,c \in A,$$

Eks:

$$\checkmark: R_{\leq}, R_{<}, R_{=}, R_{\equiv}, R_{\text{abs}}, R_1,$$

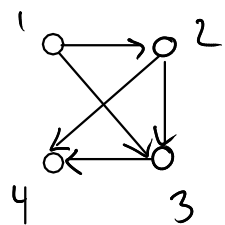
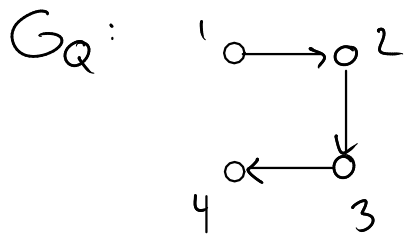
$$\%: R_{\neq}, S = \{(1,2), (2,3), (4,2)\}$$

$$t(S) = \{(1,2), (1,3), (2,3), (4,2), (4,3)\} :$$

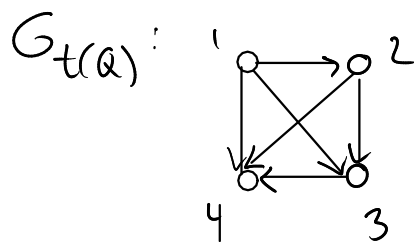


Eks:  $Q = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

$$t(Q) = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$



$\uparrow$   
 $Q \cup \underbrace{Q \circ Q}_{Q^2}$



$\uparrow$   
 $t(Q) = Q \cup Q^2 \cup Q^3$