

Sidste gang:

Binaire relationer på en mængde A

Eks: $R_{<} = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b \}$

Repr.:

Opremsning

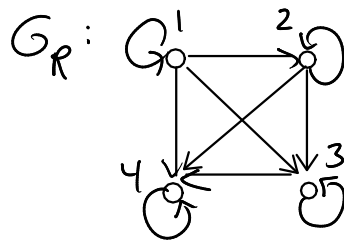
Mængde-bygger - notation (som overfor)

Matricer

Grafer

Eks: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{ (a,b) \in A \times A \mid a \leq b \}$$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber

Refleksiv

loops, 1 på diagonalen

Symmetrisk

kun dobbelt-pile, l'ere spejles i diag.

Anti-symmetrisk

ingen dobbelt-pile, ingen spejlede l'ere

Transitiv

vej $\Rightarrow$ kant

Lukninger

Refleksiv

Tilføj loops / 1-taller

Symmetrisk

Tilføj modsatrettede kanter / spejl 1'ere

Anti-symmetrisk

∕.

Transitiv



Gentag

Afsnit 9.1

Relationer er mængder, og kan kombineres v.h.a. mængde-operationer:

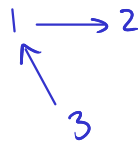
$$\left. \begin{array}{l} R_1 \cup R_2 \\ R_1 \cap R_2 \\ R_1 - R_2 \\ R_1 \oplus R_2 \end{array} \right\} \text{ Se } \underline{\text{Eks 17-19}}$$

Relationer kan også sættes sammen, som funktioner:

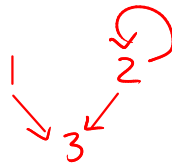
Def. 6: $S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$

Eks :

$$R = \{(1, 2), (3, 1)\}$$



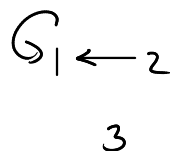
$$S = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$$



$$S \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$



$$R \circ S = \{(1, 1), (2, 1)\}$$



$$R^2 = R \circ R = \{ (3,2) \}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = R^2 \circ R = \{ \} = R^4 = R^5 = \dots$$

D.v.s.

$$R^* = \{ (1,2), (3,1), (3,2) \}$$

fordi:

Afsnit 9.4:

Def. 2: $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

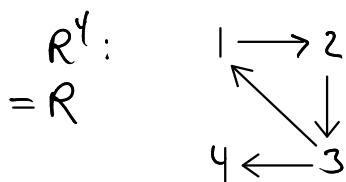
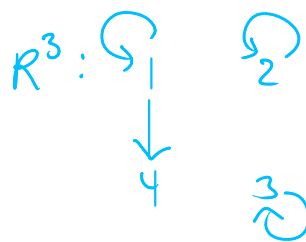
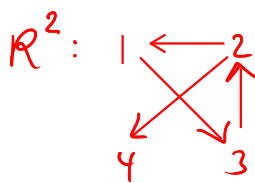
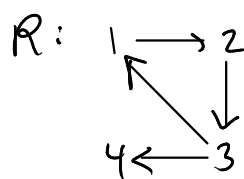
Graf-færdelning:

G_R^i indeholder en kant for hver vej af længde i i G_R .

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i, \quad \text{hvis } A \text{ er endelig, fordi:}$$

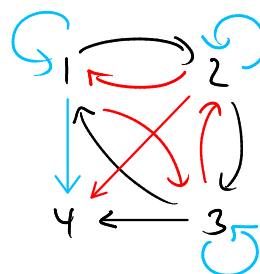
Hvis der er en vej fra a til b , er der en vej fra a til b af længde højst $|A|$.

Eks: $R = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,4)\}$



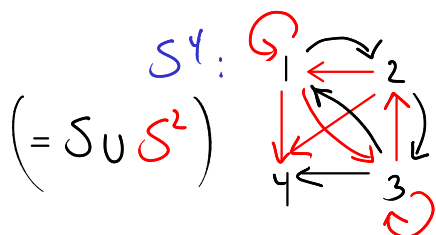
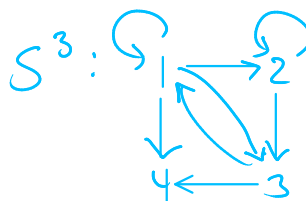
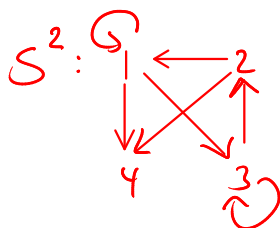
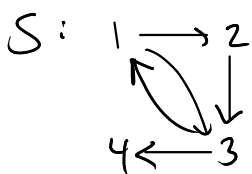
D.v.s. $R^5 = R^2$, $R^6 = R^3$, ...

D.v.s. $R^* = R \cup R^2 \cup R^3$:

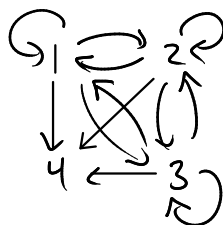


I ovenstående eks. var R , R^2 og R^3 parvis disjunkte, og $R^4 = R$. Sådan er det ikke altid. Prøv f.eks. at tilføje parret $(1,3)$ til R :

Eks: $S = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1), (3,4)\}$



$S^* = S \cup S^2 \cup S^3 = R^*$:



Løsning 2:

Den transitive lukning, $t(R)$, af en relation R er givet ved $t(R) = R^*$.

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def. 1:

En relation, som er

- refleksiv
- symmetrisk
- transitiv

kaldes en ækvivalensrelation.

Eks:

$$\sqrt{}: =, \equiv$$

$$\forall: \leq, |, \neq$$

Def. 2:

Hvis R er en ækv. rel., og $(a, b) \in R$,
da er a og b ækvivalente.

D.v.s. hvis R er en ækv. rel., og $(b, a) \in R$,
da er a og b ækvivalente (R er symmetrisk).

Def. 3:

Lad R være en ækv. rel. på A og
lad $a \in A$.

Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{ b \mid (a, b) \in R \} = \{ b \mid (b, a) \in R \}$$

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$[3]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\} = [0]$$

O.S.U.

Bemærk: $[0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: „disjunkt forening“)

Eks: $R = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øetning 1:

Lad R være en ækv.rel. på A .

Da gælder

$$\begin{array}{ll} aRb & (i) \\ \Updownarrow & \\ [a] = [b] & (ii) \\ \Updownarrow & \\ [a] \cap [b] \neq \emptyset & (iii) \end{array}$$

Bevis:

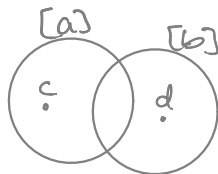
Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b]} : \quad ((i) \Rightarrow (ii))$$

Antag, aRb .

Da gælder også bRa , da R er **symmetrisk**

Kunne man forestille sig:



Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b]} :$$

$$\begin{aligned} & c \in [a] \\ \Updownarrow & \\ & aRc, \text{ per def.} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ bRc, \text{ da } bRa \text{ og } R \text{ er transitiv}$$

$$\Updownarrow \\ c \in [b] \text{ per def.}$$



$$\underline{[b] \subseteq [a]} :$$

Helt tilsvarende:

$$\begin{aligned} & d \in [b] \\ \Updownarrow & \\ & bRd, \text{ per def.} \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ aRd, \text{ da } aRb \text{ og } R \text{ er transitiv}$$

$$\Updownarrow \\ d \in [a]$$

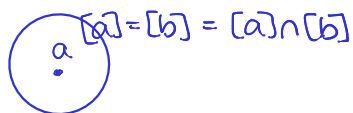


$$\text{O.v.s. } [a] = [b]$$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset :} \quad ((ii) \Rightarrow (iii))$$

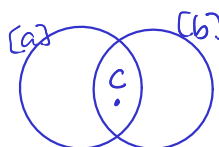
Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er **refleksiv**



$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb :} \quad ((iii) \Rightarrow (i))$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge bRc \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{symmetrisk} \\ & \Leftrightarrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{transitiv} \end{aligned}$$