

Sidste gang: Følger og rækker

Eks: Fibonacci-tallene: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

Mandelbrot-følgerne: $X_0 = 0$

$$X_n = X_{n-1}^2 + C, \quad n \geq 1$$

Geometriske følger: $a_n = r \cdot a_{n-1}$

Eks: $\{a\}_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Aritmetriske følger: $a_n = a_{n-1} + d$

Eks: $\{a_n\} = 1, 2, 3, 4, \dots$

$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, \dots$

Eks: Geometriske rækker: $\sum_{i=0}^n ar^i = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$

$$\text{Eks: } \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Aritmetriske rækker: $\sum_{i=1}^n a + id = (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2}$

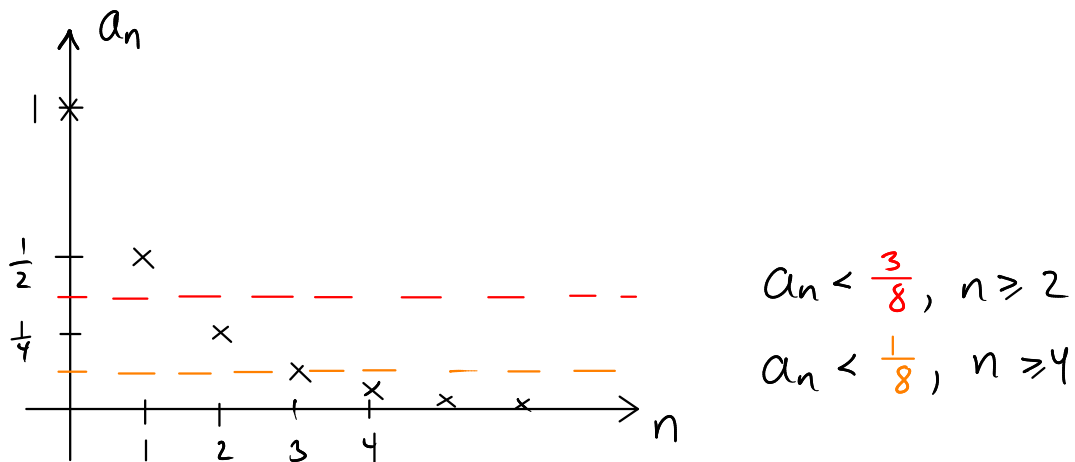
$$\text{Eks: } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n 1 + 2i = (n+1)^2$$

n 'te harmoniske tal: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \approx \ln n$

1 dag skal vi se på uendelige følger, konvergens og divergens.

Ex: $\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ konvergerer mod 0

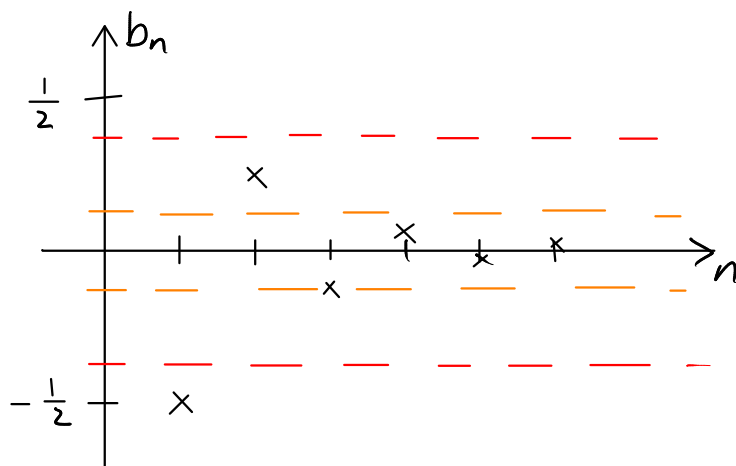


Generelt: $a_n < \varepsilon$, for $n > \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, fordi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

Bemærk: Uafhængigt af hvilket ε er på 0, findes der et N , der er så stort, at $a_n < \varepsilon$ for alle $n > N$.

Eks: $\{b_n\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$
D.v.s. $b_n = (-\frac{1}{2})^n$



$$|b_n| < \epsilon, \text{ for } n > \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil$$

Bemærk: Uafhængigt af hvilket ϵ er på 0,
findes der et N , der er så stort, at
afstanden mellem b_n og 0 er mindre end ϵ ,
for alle $n \geq N$.

Følger og konvergens | Afsnit 9.1 (Adams, Essex)

Følger og konvergens | Afsnit 9.1 (Adams, Essex)

Def 2:

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L \in \mathbb{R}$.

His $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$,

da konvergerer a_n mod grænseværdien L .

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

0 i eks. overfor

Kan også skrives sådan:

$a_n \rightarrow L$ for $n \rightarrow \infty$.
 "går imod" "går mot"

En sekvens, som ikke konvergerer, **divergerer**.

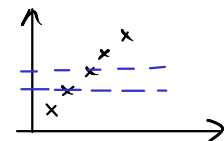
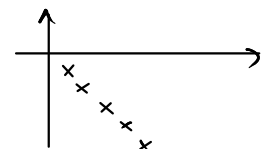
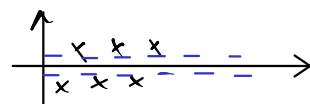
Ex 5:

$$\left\{ \frac{n-1}{n} \right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \quad \text{konvergiert mod 1}$$

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

D.v.s. vi kan f.eks. vælge $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ i Def. 2

$$\{n\} = 1, 2, 3, \dots \text{ diverges mod } \infty$$

$$\{-n\} = -1, -2, -3, \dots \text{ diverges mod } -\infty$$

$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \dots \text{ diverges}$$


Regneregler for grænseværdier (s. 499 ø.):

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer, gælder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\begin{aligned} \text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Tilsvarende for $-$ og $\cdot$
og for $/$, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Eks 6a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{2-0-0}{5+0-0} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Tommelfingerregel: Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.

Øøthing 3

Lad $x \in \mathbb{R}$. Da gælder:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0, \text{ hvis } |x| < 1$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Bevis:

(a): (Beviset er en smule anderledes end i bogen)

Af Def. 2 fås:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x|^n < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \ln |x| < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}, \text{ da } |x| < 1 \Rightarrow \ln |x| \neq 0$$

under ulighedstegnet, da vi dividerer med noget negativt

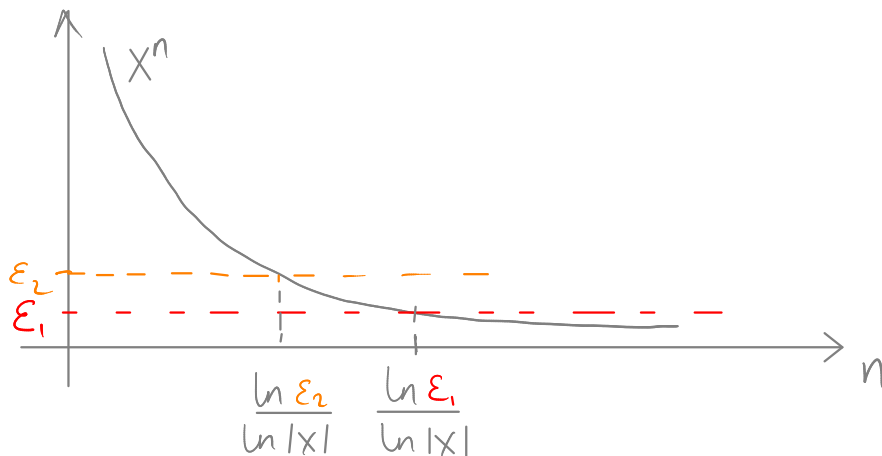
D.v.s.

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} \Rightarrow |x^n| < \varepsilon$$

M.a.o.:

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} : |x^n| < \varepsilon$$

Illustration:



$$\begin{aligned}
 (b) \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \frac{|x| \cdot |x| \cdot \dots \cdot |x|}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \\
 &= \underbrace{\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil}}_{\substack{\text{afhænger kun af } x, \\ \text{ikke af } n}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 1} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}}_{< \frac{|x|}{n}} \\
 &< C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor } C = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{\lceil |x| \rceil} = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!}
 \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot \frac{|x|}{n}, \quad \text{hvor } C = \frac{|x|^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!} \\
 &= C \cdot |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \quad \text{if. regneregler for grænseværdier} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Klar, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \geq 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

□

Eks 10:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n + \left(\frac{4}{5} \right)^n + 1 \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1, \\&\quad \text{iff. regelene for grenseverdier} \\&= 0 + 0 + 1, \quad \text{iff. Sætning 3(a).}\end{aligned}$$

Lad os vende tilbage til en af de rækker,
vi så på i starten af forelæsnngen:

Endelig række:

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Uendelig række:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - 0 = 2$$

Mer generelt:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{0-1}{r-1} = \frac{1}{1-r}, \quad \text{hvis } |r| < 1$$

↑
regne-regel + Sætning 3(a)

Vi så også et eksempel på en aritmetrisk række:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad - \quad \text{div konver}$$

Uendelige rækker

Def. 3

Betrakt rækken $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, og lad $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$.
Da kaldes s_n rækkens n 'te partielle sum.

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$,

siges $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ at konvergere mod s .

Dette skrives også som $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$.

Eks: $a_n = (\frac{1}{2})^n, n \geq 0$
 $\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$$s_n = \sum_{i=0}^n (\frac{1}{2})^i = 2 - (\frac{1}{2})^n$$

$$\{s_n\} = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots$$

$\{s_n\}$ konvergerer mod 2

$$\text{D.v.s. } \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2$$