

Sidste gang:

Relationer (fortsat)

Sammensætning: $\circ, \cup, \cap, -, \oplus$ (Afsnit 9.1)

$$R^2 = R \circ R$$

$$R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i \quad (\text{Afsnit 9.4})$$

Transitive lukning: $t(R) = R^*$

Ækvivalensrelationer

(Afsnit 9.5)

Ækv.klasser:

$$[a]_R = \{b \mid aRb\}$$

Setning 1:

$$aRb \iff [a]_R = [b] \iff [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

1 dag:

Setning 2:

Ækv.rel $\leftrightarrow$ Partitionering af A

Partielle ordninger

(Afsnit 9.6)

Repr. o.h.a. Hasse-diagram

Total ordning

Leksikografisk ordning

Seetning 1 kan bruges til at vise:

Seetning 2:

Lad A være en mængde. Da gælder

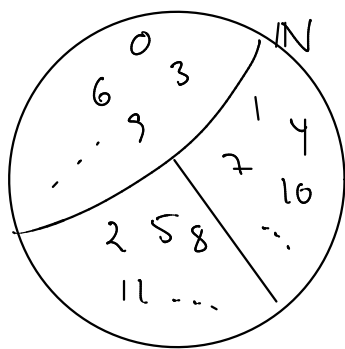
(1) R er en ækv.rel på $A \Rightarrow$

R 's ækv.klasser udgør en partitionering (disjunkt opdeling) af A .

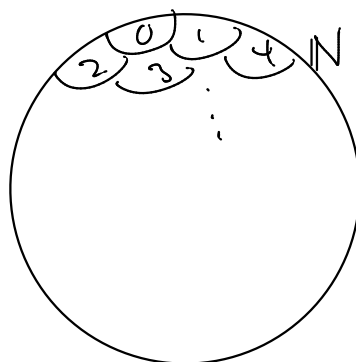
Det omvendte gælder også:

(2) For enhver partitionering af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i partitioneringen.

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$



$S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$



Beris for Sætning 2:

(1): Ækv.rel. $\Rightarrow$ partitionering:

dvs. hvert element er indeholdt i præcis én mængde.

Ækv.klasserne dækker hele A , dvs $\bigcup_{a \in A} [a] = A$:

$a \in [a]$ for alle $a \in A$, da R er refleksiv

Dvs. ethvert element i A er indeholdt i en ækv.klasse.

Ækv.klasserne er disjunkte, dvs. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Kontraposition: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

↑
Sætning 1

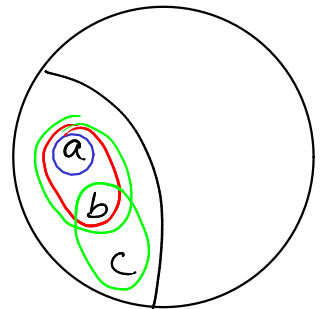
(2): Partitionering $\Rightarrow$ ækv.rel.:

Lad R være relationen defineret ved, at aRb , hvis og kun hvis a og b tilhører samme mængde i partitioneringen.

Vi skal vise, at R er en ækv.rel.

Refleksiv: for alle $a \in A$ gælder:

a tilhører samme mængde som a .



Symmetrisk: for alle $a, b \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

så tilhører b samme mængde som a .

Transitiv: for alle $a, b, c \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

og b tilhører samme mængde som c ,

så tilhører a samme mængde som c .

Partielle ordninger (afsnit 8.6)

Def 1:

En relation R på en mængde A , som er

- refleksiv,
- **anti**symmetrisk og
- transitiv

kaldes en **partiel ordning**.

(A, R) kaldes en **partielt ordnet mængde** (poset)

Eks:

$\vee : \leq, =, |, \subseteq$

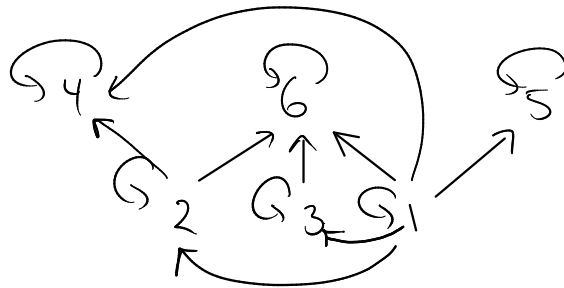
$\wedge : <, \neq, \equiv, <$

ref. anti-sym. trans. ref.

Eks:

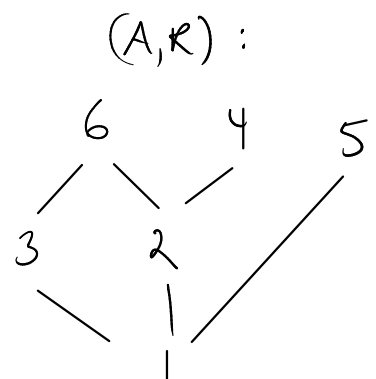
$A = \{1, 2, \dots, 6\}$, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \mid b\}$

(A, R) :



Hasse-diagram:

- Udelad alle kanter, som kan udledes af egenskaberne refleksiv og transitiv.
- Tegn a under b , hvis aRb .



Def 2:

Lad $\leq$ være en partiel ordning

Hvis $a \leq b$ eller $b \leq a$, kaldes a og b sammenlignelige.

Def. 3:

Lad $(A, \leq)$ være en partielt ordnet mængde.

Hvis alle $a, b \in A$ er sammenlignelige,

kaldes $\leq$ en total ordning

Eks:

$\sqrt{} : \leq$

$\% : =, |, \subseteq, <$

6
|
5
|
4
|
3
|
2
|
1

Leksikografisk ordning $\leq$

$\leq_1, \leq_2$: partielle ordninger

$a <_1 b$ betyder $a \leq_1 b \wedge a \neq b$

Tilsvarende for $\leq_2$.

$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, hvis

$a_1 <_1 b_1$

eller

$a_1 = b_1$ og $a_2 \leq_2 b_2$

Eks: Ordbog

Her er $\leq_1, \leq_2, \leq_3, \dots$ alfabetrækkefølge