

## Sidste gang:

Vha. undersummer og oversummer udlidte i:

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{i} di < \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}_{H_n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{i} di = 1 + \ln(n)$$

## Sætning 7: Regneregler

Hvis  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$  og  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ , gælder

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B$$

$$(c) \begin{array}{l} a_n \leq b_n, \text{ for alle } n \geq 1 \\ \Downarrow \\ A \leq B \end{array}$$

Sætning 4:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

D.v.s.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergerer

Sætning 5:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer  $(\Leftrightarrow)$

$$\forall N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

## Sætning 8 : Integral - Kriteriet

Hvis  $a_n = f(n)$ , hvor

$f$  er positiv, kontinuert og aftagende på  $[N, \infty)$ ,  
gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \iff \int_N^{\infty} f(n) dn \text{ konvergerer}$$

$p$ -rækker:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} = \frac{1}{1-p}, & \text{hvis } p > 1 \\ \text{divergerer,} & \text{hvis } p \leq 1 \end{cases}$$

1 dag:

Sætning 9+10 : (Grænse-)Sammenlignings - Kriteriet

Sætning 11 : Kvotient - Kriteriet

Sætning 12 : Rod - Kriteriet

### Sætning 9: Sammenlignings-kriteriet

Hvis  $\exists N, K \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$ ,

da gælder:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerer  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergerer  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergerer

Beris:

(a) Af Sætning 5 følger:

•  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerer  $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$  konvergerer

•  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerer  $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} b_n$  konvergerer

Desuden gælder:

$$\Updownarrow \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$$

$$\Updownarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} K b_n, \text{ ifølge Sætning 7(a)}$$

$$\Updownarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq K \sum_{n=N}^{\infty} b_n, \text{ ifølge Sætning 7(c)}$$

Dermed gælder ifølge Sætning 6:

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

(b) Udsagnet er det kontraposition af udsagnet i (a).

□

### "Eks 3"

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n+1}$  konvergerer iflg. Sætning 9(a):

$$\frac{4}{2^n+1} < 4 \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ for } n \geq 1$$

(c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  divergerer iflg. Sætning 9(b):

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \text{ for } n \geq 2$$

Husk, at Sætning 9 **ikke** siger, at  $\sum a_n$  konvergerer  $\Rightarrow \sum b_n$  konvergerer.

Af Sætning 9 følger:

### Sætning 10: Grænse-Sammenlignings-Kriteriet

Hvis  $\{a_n\}$  og  $\{b_n\}$  er positive følger, og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad (\text{evt. } = \infty)$$

da gælder

(a)  $(L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger}$

(b)  $(L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverger mod } \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverger mod } \infty.$

Beweis:

(a)  $L < \infty$

$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + \overset{\varepsilon \text{ i Def. 2}}{1}, \text{ iflg Def. 2}$

$\Downarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)b_n$

D.v.s.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverger},$

iflg. Sætning 9(a)

(b) bevises på tilsvarende vis v.h.s. Sætning 9(b).



Eks 4(a):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

Sammenlign med  $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  er en  $p$ -række med  $p = 1/2$ .

D.v.s. den diverger.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

Dermed diverger  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$  ifølge

Grænse-Sammenlignings-Kriteriet.

Bemærk: Grænsesammenligningskriteriet sammenligner tilsvarende led i to forskellige rækker.

Kvotientkriteriet sammenligner nabo-led inden for samme række:

## Sætning 11:

## Kootient-Kriteriet (Ratio test)

Hvis

- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0$  ( $a_n > 0$  ultimately)
- $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  eksisterer eller er uendelig

da gælder:

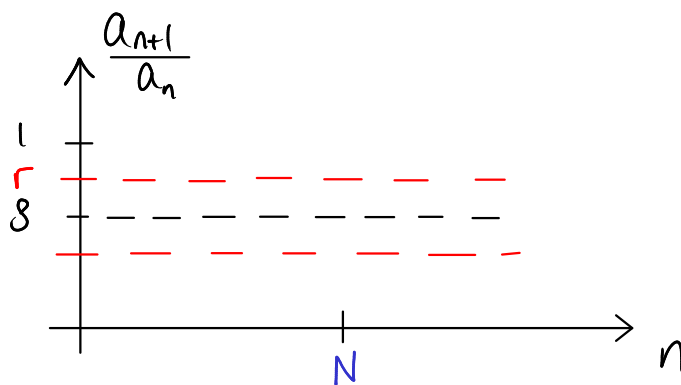
(a)  $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverger

(b)  $\rho > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(c)  $\rho = 1$ : ingen information

Bevis:

(a):



Ifølge Def. 2:

$$\forall r \in \mathbb{R}, \rho < r < 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

D.v.s. der findes et  $r < 1$ , sådan at:

$$a_{N+1} \leq r a_N$$

$$a_{N+2} \leq r \cdot a_{N+1} \leq r^2 \cdot a_N$$

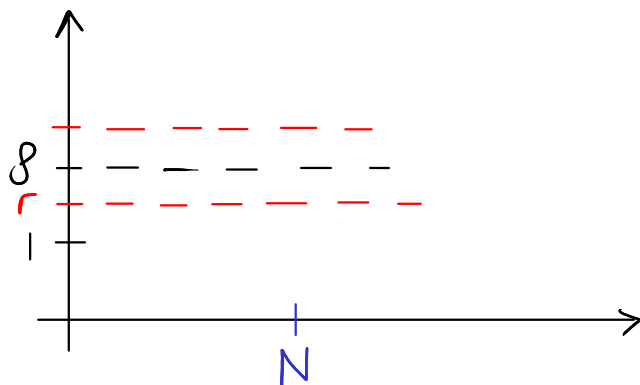
$$a_{N+3} \leq r \cdot a_{N+2} \leq r^3 \cdot a_N$$

$\vdots$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} a_n &\leq \sum_{n=N}^{\infty} r^{n-N} a_N = a_N \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} r^n}^{\text{geometrisk række}} \\ &= \underbrace{a_N \cdot \frac{1}{1-r}}_{\in \mathbb{R}}, \quad \text{da } r < 1 \end{aligned}$$

(b): Tilsvarende:



$$a_{N+1} \geq r a_N$$

$\vdots$

$$a_{N+k} \geq r^k a_N$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \geq a_N \sum_{n=N}^{\infty} r^n = \infty, \quad \text{da } r > 1$$

(c):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverger og  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konverger, men

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$



Eks:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  konverger:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$

Eks:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$  konverger:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 / 2^{n+1}}{n^5 / 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 \cdot 2^n}{n^5 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

## Sætning 12: Rod-Kriteriet

Hvis

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0$ , og  
 $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  eksisterer eller er  $\infty$

da gælder

(a)  $0 \leq \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverger

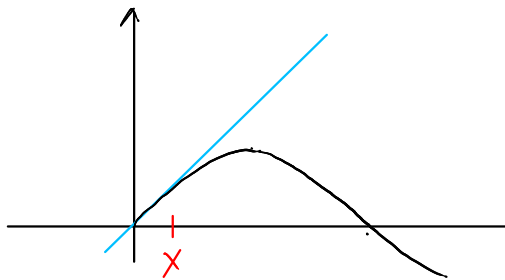
(b)  $\sigma > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverger mod  $\infty$

(c)  $\sigma = 1$  : Ingen information

## Potensrækker - "opvarmning"

Hvordan beregner man  $\sin(x)$ ?

$\sin$  er en transcendent funktion. D.v.s.  $\sin(x)$  kan ikke beregnes via et endeligt antal  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  $\sqrt{\quad}$  - operationer. Men vi kender f.eks.  $\sin(0)$ .



$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x = x$$

Dårlig approx., hvis  $x$  er stor.

Lidt bedre approx.:

$$\sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{\sin''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{\sin'''(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$\sin(0) + \cos(0) \cdot x - \frac{\sin(0)}{2} \cdot x^2 - \frac{\cos(0)}{6} \cdot x^3 =$$

$$0 + x - 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

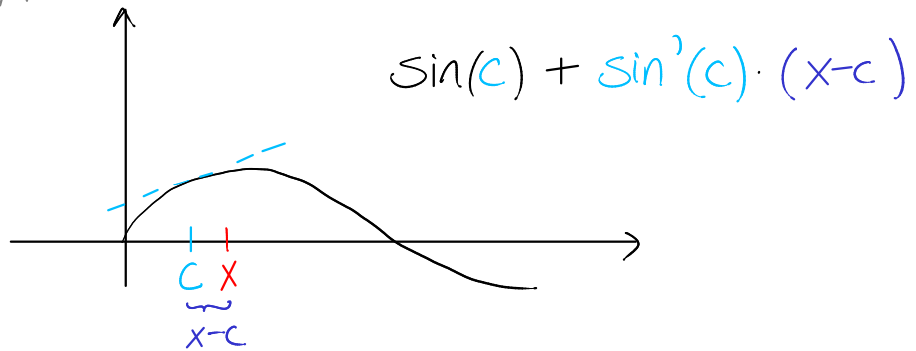
Helt præcist:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Taylorrækken for  $\sin$  omkring 0

Man kunne selv. også tage udgangspunkt i et andet punkt end  $x=0$ :



$$\sin(x) = \sin(c) + \sin'(c) \cdot (x-c) + \frac{1}{2} \sin''(c) \cdot (x-c)^2 + \dots$$

Taylorrækken for  $\sin$  omkring  $c$

Taylorrækker er potensrækker.

**Potensrækker** (Adams, Essex afsnit 9.5)

**Def. 7:** En række på formen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$  kaldes en potensrække omkring  $c$ .

Ex:  $a_n=1, c=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

