

Sidste gang:

Flere konvergenzkriterier:

Sætning 9: **Sammenlignings-Kriteriet**

Hvis $0 \leq a_n \leq K b_n$, for alle $n \geq N$, hvor $K, N \in \mathbb{Z}^+$,
da gælder

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer}$$

Sætning 10: **Grænse-Sammenlignings-Kriteriet**

Hvis $a_n, b_n \geq 0$ for alle $n \geq 1$, da gælder:

$$(a) \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty \right)}_{\sim K} \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \right) \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Sætning 11: Kvotient-Kriteriet

Hvis $a_n > 0$, for alle $n \geq N$, $N \in \mathbb{Z}^+$, og $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er ∞ , da gælder:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, kan Kvotient-Kriteriet ikke bruges.

Sætning 12: Rod-Kriteriet

Hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer eller er ∞ , da gælder:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, kan Rod-Kriteriet ikke bruges.

Potens-rækker:

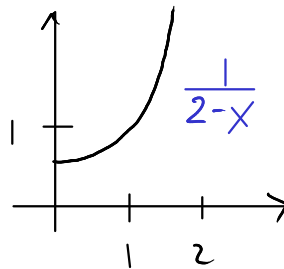
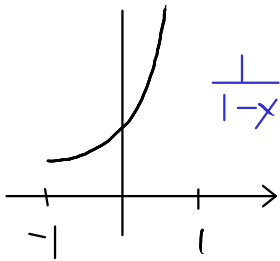
Def 7: En række på formen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ kaldes en potensrække omkring c.

a_n kan som (indekset antyder) afhænge af n , men ikke af x .

Eks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \underbrace{-1 < x < 1}_{\text{konvergens-intervallet}} \quad (a_n=1, c=0)$$

Rækken diverger for $x \leq -1$ og $x \geq 1$.



$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{2-x}, \quad \underbrace{0 < x < 2}_{\text{konvergens-intervallet}} \quad (a_n=1)$$

Rækken diverger for $x \leq 0$ og $x \geq 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x) \quad \left(a_n = \begin{cases} 0, & \text{for lige } n \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & \text{for ulige } n \end{cases} \right)$$

Rækken konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$.

↑
konvergens-intervallet

Bemærk: En potens-række konvergerer altid for $x=c$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n, \quad \text{for } x=c \\ &\stackrel{(*)}{=} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots \\ &= a_0\end{aligned}$$

$$(*) : 0^n = \begin{cases} 1, & \text{hvis } n=0 \\ 0, & \text{hvis } n \geq 1 \end{cases}$$

Bemærk desuden, at c ligger midt i konvergens-intervallet i ovenstående eksempler. Det er ikke tilfældigt:

Setning 17:

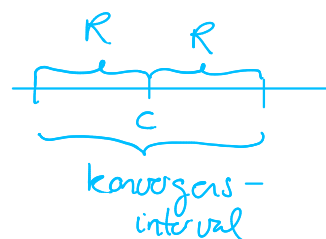
For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gælder et af følgende tre udsagn:

(i) Rækken konvergerer kun for $x=c$. ($R=0$)

(ii) Rækken konvergerer for ethvert $x \in \mathbb{R}$. ($R=\infty$)

(iii) Der findes et $R \in \mathbb{R}$, så rækken
- konvergerer, hvis $|x-c| < R$
- divergerer, hvis $|x-c| > R$.

D.v.s. rækken konvergerer måske for $x = c \pm R$



R kaldes rækkens konvergensradius, og
 c kaldes rækkens konvergens-centrum.

Eks:

$\sum_{n=0}^{\infty} (x-c)^n$ har konv. radius 1 (konv. int. $(c-1, c+1)$)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ har konv. radius ∞

Howdan bestemmes konvergensradius?

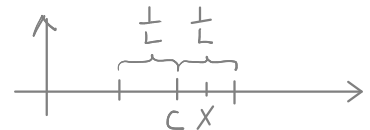
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konverger, hvis $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-c)^n|$ konverger

I følge **Quotient-Kriteriet** konverger $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-c)^n|$,
hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right|$ eksisterer og er mindre
end 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{\cancel{n+1}}}{a_n \cancel{(x-c)^n}} \right| < 1$$

$$\Updownarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)}{a_n} \right| < 1$$

$$\Updownarrow |x-c| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$



D.v.s. hvis grænseværdien $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
eksisterer, da er $R = \frac{1}{L}$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 = L$$

D.v.s. $R = \frac{1}{L} = 1$

D.v.s. rækken konvergerer, når $2 < x < 4$

Bemærk, at rækken konvergerer, når $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-3)^n = 0$

D.v.s. den nødvendige betingelse fra Sætning 4 er i dette tilfælde tilstrækkelig.

Eks 9.5.2(a): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$c=0$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

D.v.s.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

D.v.s.

$$R = \infty$$

D.v.s.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

| Eks 9.6.1 får vi at se, at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Hvis en potensrække har en positiv konvergensradius, kan den differentieres led for led:

Sætning 19:

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, for $-R < x < R$,

da er $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, for $-R < x < R$.

Afsnit 9.6: Taylor- og Maclaurin-rækker

Øøthning 21:

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, for $c-R < x < c+R$, da er
 $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevis:

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $c-R < x < c+R$,
følger det af **Øøthning 19** (anvendt flere gange),
at for $c-R < x < c+R$ gælder:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3(x-c) + 3 \cdot 4 a_4(x-c)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 (x-c) + 3 \cdot 4 \cdot 5 (x-c)^2 + \dots$$

$\vdots$

D.v.s.

$$f'(c) = a_1 = 1! a_1$$

$$f''(c) = 2a_2 = 2! a_2$$

$$f'''(c) = 2 \cdot 3 a_3 = 3! a_3$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(c) = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n a_n = n! a_n$$

□

D.v.s. hvis der findes en potensrække, som repræsenterer $f(x)$ i et åbent interval, da er den entydigt bestemt (der kan ikke være to forskellige potens-rækker, som repræsenterer den samme funktion).

Def. 8: Hvis $f^{(n)}(x)$ eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$, da kaldes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$ for Taylor-rækken for f omkring c .

Hvis $c=0$, kaldes rækken også Maclaurin-rækken for f .

NB:

Taylor-rækken for f omkring c er lig med $f(x)$ for $x=c$. For andre x -værdier konvergerer den ikke nødvendigvis.

Og hvis den konvergerer for andre x -værdier, konvergerer den ikke nødvendigvis mod $f(x)$.

Eks: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$$

D.v.s. Taylor-rækken for e^x omkring 1 er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$$

og Maclaurin-rækken for e^x er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Eks: $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \\ f^{(4)}(x) = \sin(x), \dots$$

D.v.s.

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 1, \dots$$

D.v.s.

Maclaurin-rækken for $\sin(x)$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Ifølge Eks. 9.5.2(a) konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$,
men konvergerer den mod e^x ?
Ja: