

Sidste gang:

Potensrækker: Rækker, der kan skrives på formen
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$

$a_n = 1, \quad c = 0$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}, \quad c = 0$

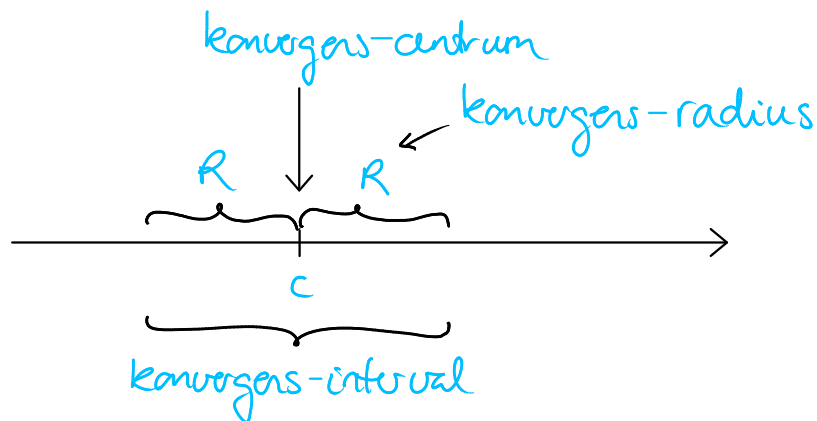
konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

$a_n = n!, \quad c = 0$

konvergerer kun for $x = 0$.

Øvelse 17:



(i) $R = 0$

(ii) $R = \infty$

(iii) $0 < R < \infty$

$R = \frac{1}{L}, \quad \text{hvor} \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Taylor-rækker:

Sætning 21: Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, for $\underbrace{c-R < x < c+R}$,
da er $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, for alle $n \in \mathbb{N}$. åbent interval,
d.v.s. indeholder
ikke c .

Def. 8: Hvis $f^{(n)}(x)$ eksisterer for alle $n \in \mathbb{N}$, da
kaldes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$ for Taylor-rækken for f
omkring c .

Hvis $c=0$, kaldes rækken også Maclaurin-rækken for f .

NB:

Taylor-rækken for f omkring c er lig med $f(x)$ for $x=c$.
For andre x -værdier konverger den ikke nødvendigvis,
og hvis den konverger, konverger den ikke nødvt.
mod $f(x)$.

Eks: e^x

Taylor-rækken for e^x omkring 1 er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$

Maclaurin-rækken for e^x er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Eks: $\sin(x)$

Maclaurin-rækken for $\sin(x)$ er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Ifølge Eks. 9.5.2(a) konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ for alle $x \in \mathbb{R}$,
men konvergerer den mod e^x ?
Ja:

$$\text{Lad } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

$P_n(x)$ kaldes Taylor-polynomiet af grad n omkring c .

„Tommelfingerregel“:

Hvis vi bruger $P_n(x)$ til at approksimere $f(x)$,
er fejlen, vi begår, af samme størrelses-orden som
det næste led i Taylor-rækken:

Sektion 22: Taylors Sektion

Antag, at $f^{(n+1)}(x)$ eksisterer.

Da eksisterer der et δ mellem x og c , sådan at

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \quad \text{hvor}$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

Eks 9.6.7:

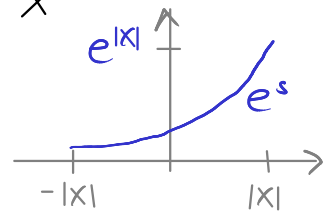
Af Taylors Sætning følger, at

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + E_n(x), \text{ hvor}$$

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ for et } s \text{ mellem } 0 \text{ og } x.$$

D.v.s.

$$E_n(x) \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \text{ da } e^s \text{ vokser med } x$$



D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) &= e^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= e^{|x|} \cdot 0, \text{ ifølge Sætning 3(b)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D.v.s.

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x - E_n(x)$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x)}_0 = e^x$$

Def. 9: Hvis Taylor-rækken for f omkring c konvergerer mod f i et åbent interval indeholdende c , kaldes f analytisk i c .
Hvis f er analytisk i et åbent interval I , kaldes f analytisk på I .