

Sidste gang:

Logiske operatorer: $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$ + præcedensregler

Sandhedstabeller for operatorer og sammensatte udsagn

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	F
F	F	S	S

Af sandhedstabellen fremgår det, at

$$p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q \quad \text{og}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$$

Vi udlodte også to andre ækvivalenser:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p \quad (\text{Tabel 1.3.7})$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad (\text{Tabel 1.3.8})$$

$p \Rightarrow q$ og $p \Leftrightarrow q$ kan formuleres på mange forskellige måder:

$$p \Rightarrow q$$

p medfører q

hvis p , så q

p er en tilstrækkelig betingelse for q

p kun hvis q

q er en nødvendig betingelse for p

$$p \Leftrightarrow q$$

p er ensbetydende med q

p hvis og kun hvis q

p hvis q

p er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for q

1 dag:

⊕

Flere ækvivalenser (Fra Tabel 1.3.6 og 1.3.7)

Tabel 1.3.6, 1.3.7 og 1.3.8 er nyttige!

Læs gerne dem alle tre igennem.

Åbne udsagn
Kvantorer : $\forall, \exists$ } Afsnit 1.4

Men først et eks. fra Afsnit 1.2.

Eks 1.2.8:

Riddere taler altid sandt.

Knægte lyver altid.

(1) A siger: B er ridder

(2) B siger: Vi er forskellige slags

Hvad er A og B?

Definer følgende to udsagn.

a: A er ridder

b: B er ridder

Kan A være ridder?

$a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} b \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \neg a \quad \text{⚡ (modstrid)}$

Hvis der er en løsning, må A altså være knægt.

Kan A være knægt?

$\neg a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \neg b \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \neg a$

$\neg a \wedge \neg b$ opfylder både (1) og (2).

D.v.s. løsningen er:

A og B er begge knægte.

Kunne også løses v.h.s. sandhedstabel:

a	b	(1)	(2)
S	S		F
S	F	F	
F	S	F	
F	F	S	S

eneste mulighed

A og B's udtalelser kunne også skrives som
b og $a \oplus b$:

$p \oplus q$: eksklusiv eller
enten p eller q
 p og q har forskellige sandhedsværdier

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

D.v.s.

$$p \oplus q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$$

$$p \oplus q \equiv \neg p \Leftrightarrow q$$

D.v.s. " $\oplus$ " kan udtrykkes v.h.a. " $\neg$ " og " $\Leftrightarrow$ "

Kan vi også omskrive andre logiske operatoren?

Kan vi f.eks. skrive " $\Rightarrow$ " v.h.a. andre operatoren?

D.v.s. kan vi føje endnu en ækvivalens til samlingen?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	
S	S	S	S	} (1)
S	F	F	F	
F	S	S	S	} (2)
F	F	S	S	

For begge udtryk gælder:

(1): Hvis p er sand, skal q også være det.

(2): Hvis p er falsk, er udsagnet sandt.

Vi har altså bevist:

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	(Tabel 1.3.7, 1. linje)
--	-------------------------

Tabel 1.3.6 (s. 29) er også vigtig.

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive love (lidt som at gange ind i parentes)

$$(1) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Sandhedstabellen har 8 rækker.

For begge udsagn gælder:

- Hvis p er sand, er udsagnet sandt.

D.v.s. begge udsagn har „S” i de første fire rækker af sandhedstabellen.

- Hvis p er falsk, er udsagnet sandt, hvis q og r begge er sande.

D.v.s. blandt de sidste fire rækker, er det kun den første, der har et „S”.

$$(2) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

For begge udsagn gælder:

- p skal være sand

D.v.s. „F” i nedste fire rækker

- Mindst et af q og r skal være sand, men de behøver ikke begge være det.

D.v.s. „S” i første tre rækker og „F” i fjerde række.

De Morgans Love

$$(1) \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Beis: opgave 1.3.6

Beis: Tabel 1.3.3 (s.27)

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(2+2 \neq 4 \vee 3 > 5) \\ \Leftrightarrow & \neg(2+2 \neq 4) \wedge \neg(3 > 5) \\ \Leftrightarrow & 2+2 = 4 \wedge 3 \leq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(2+2 = 4 \wedge 3 > 5) \\ \Leftrightarrow & 2+2 \neq 4 \vee 3 \leq 5 \end{aligned}$$

Efterhånden, som vi har flere og flere ækvivalenser at gøre gældt med, er sandhedstabeller ikke nødvendigvis den mest effektive måde at bevise nye ækvivalenser:

Eks 1.3.6 (s. 31)

$$\boxed{\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q} \quad (\text{Tabel 1.3.7, 15})$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && (\text{Tabel 1.3.7, 21}) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \left\{ \begin{array}{l} (\text{De Morgan (2)}) \\ (\text{Dobbelt-neg. loven}) \end{array} \right. \\ &\equiv p \wedge \neg q && \downarrow \\ &&& (\text{Tabel 1.3.6}) \end{aligned}$$

Virker det rimeligt?

Ja:

$p \Rightarrow q$ er falsk, netop når p er sand, og q er falsk.
 $p \wedge \neg q$ er sand, netop når _____

Lidt mere terminologi:

Def. 1.3.1: (s.26)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**, uanset sandhedsværdier af de udsagnsvariable, som indgår.

Eks: $p \vee \neg p$

$$p \Leftrightarrow p$$

$$p \Rightarrow p$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \quad (\text{og alle de andre} \\ \text{øker. i afsnit 1.3})$$

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**, uanset sandhedsværdier af de udsagnsvariable, som indgår.
(Contradiction)

Eks: $p \wedge \neg p$

$$p \Leftrightarrow \neg p$$

$$p \oplus p$$

$$\neg(p \vee q) \oplus (\neg p \wedge \neg q)$$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi eller en modstrid

Eks: $p \vee q$

$$p \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow \neg p$$

Heltal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Positive heltal: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

Naturlige tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

NB: Noke definerer $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$